CÁC CHUYÊN ĐỀ MÔN TOÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN KHTN

Đề thi môn Toán vào Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên thường được đánh giá là khó, một phần vì nó có những nội dung khác với đề thi vào các trường THPT nói chung và các trường THPT chuyên khác nói riêng. Các em cần phải nắm được phương pháp giải quyết những nội dung này, để không bị "choáng" khi vào thi.

Để giúp các em có kỹ năng nhận dạng và đạt kết quả tốt trong kỳ thi vào 10, bằng kinh nghiệm của mình, Khoa Bảng đã thống kê và chia các nội dung khác biệt trên thành các chuyên đề. Dưới đây là những bài toán của 5 chuyên đề trích ra từ **Đề thi tuyển sinh vào Trường chuyên ĐHKHTN từ 2000 đến 2014 (môn Toán)** nhằm mục đích minh họa. ***Các em không nhất thiết phải giải tất cả các bài này.*** Chỉ cần giải một số bài điển hình. Khi đọc đề bài, các em nhận dạng được bài nào đó giải bằng (những) phương pháp nào mà em đã được trang bị, thì không cần giải nữa.

Chuyên đề 1: Hệ phương trình bậc cao.

Chuyên đề 2: Phương trình vô tỷ.

Chuyên đề 3: Phương trình nghiệm nguyên.

Chuyên đề 4: Các bài toán số học.

Chuyên đề 5: Bất đẳng thức.

Chuyên đề 1: Hệ phương trình bậc cao.

A. ***<u>Đề thi toán vòng 1 (Toán chung cho tất cả các chuyên):</u>***

<u>BÀI 1.1.</u> Bài 2.2 Đề năm 2001.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.2.</u> Bài 1.2 Đề năm 2002.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) + xy = 17 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.3.</u> Bài 2 Đề năm 2003.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.4.</u> Bài 1 Đề năm 2005.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.5.</u> Bài 1 Đề năm 2006.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x + y) + (1 + xy) = 4 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.6.</u> Bài 1.2 Đề năm 2007.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$

<u>BÀI 1.7.</u> Bài 1.1 Đề năm 2008.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ (x - 1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.8.</u> Bài 1.2 Đề năm 2009.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.9.</u> Bài 1.1 Đề năm 2010.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 23 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.10.</u> Bài 1.1 Đề năm 2011.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - 1)y^2 + x + y = 3 \\ (y - 2)x^2 + y = x + 1 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.11.</u> Bài 1.2 Đề năm 2012.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 2x^2 + y + xy = 4 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.12.</u> Bài 1.2 Đề năm 2013.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = xy + \dfrac{1}{xy} \end{cases}$.

<u>BÀI 1.13.</u> Bài 1.2 Đề năm 2014.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$.

<u>B. Đề thi toán vòng 2 (Toán cho chuyên Toán và chuyên Tin):</u>

<u>BÀI 2.1.</u> Bài 2 Đề năm 2002.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$.

<u>BÀI 2.2.</u> Bài 2 Đề năm 2003.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

<u>BÀI 2.3.</u> Bài 2 Đề năm 2004.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)\left(x^2+y^2\right)=15\\ (x-y)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}$

<u>BÀI 2.4.</u> Bài 2 Đề năm 2005.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^3-xy^2=1\\ 4x^4+y^4=4x+y\end{cases}$.

<u>BÀI 2.5.</u> Bài 2 Đề năm 2006.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-y^2=4x-2y-3\\ x^2+y^2=5\end{cases}$.

<u>BÀI 2.6.</u> Bài 1.1 Đề năm 2007.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+4y^2=5\\ 4xy+x+2y=7\end{cases}$.

<u>BÀI 2.7.</u> Bài 1.1 Đề năm 2008.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2y-y^2x=1\\ 8x^3-y^3=7\end{cases}$.

<u>BÀI 2.8.</u> Bài 1.1 Đề năm 2010.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\ 3x+(2x+y)(x-y)=11\end{cases}$.

<u>BÀI 2.9.</u> Bài 1.1 Đề năm 2011.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=2x^2y^2\\ (x+y)(1+xy)=4x^2y^2\end{cases}$.

<u>BÀI 2.10.</u> Bài 1.1 Đề năm 2012.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy(x+y)=2\\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3\end{cases}$.

<u>BÀI 2.11.</u> Bài 1.1 Đề năm 2013.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^3=1+y-x+xy\\ 7xy+y-x=7\end{cases}$.

<u>BÀI 2.12.</u> Bài 1.2 Đề năm 2014.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\ 6x+x^2y=12+6x+y^2x\end{cases}$.

Chuyên đề 2: Phương trình vô tỷ.

<u>A. Đề thi toán vòng 1 (Toán chung cho tất cả các khối chuyên):</u>

<u>BÀI 1.1.</u> Bài 2.1 Đề năm 2000.

Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$.

<u>BÀI 1.2.</u> Bài 2.1 Đề năm 2001.

Giải phương trình: $\sqrt{x(3x+1)}-\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}$.

<u>BÀI 1.3.</u> Bài 1.1 Đề năm 2002.

Giải phương trình: $\sqrt{8+\sqrt{x}}+\sqrt{5-\sqrt{x}}=5$.

<u>BÀI 1.4.</u> Bài 1 Đề năm 2003.

Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$.

<u>BÀI 1.5.</u> Bài 1.1 Đề năm 2004.

Giải phương trình: $|x+1|+|x-1|=1+|x^2-1|$

<u>BÀI 1.6.</u> Bài 2 Đề năm 2005.

Giải phương trình: $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

<u>BÀI 1.7.</u> Bài 1.1 Đề năm 2007.

Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$.

<u>BÀI 1.8.</u> Bài 1.2 Đề năm 2008.

Giải phương trình: $(2x+7)\sqrt{2x+7}=x^2+9x+7$.

<u>BÀI 1.9.</u> Bài 1.1 Đề năm 2009.

Giải phương trình: $x^2-x+2=2\sqrt{x^2-x+1}$.

<u>BÀI 1.10.</u> Bài 1.2 Đề năm 2010.

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$.

<u>BÀI 1.11.</u> Bài 1.2 Đề năm 2011.

Giải phương trình: $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2(x+1)}$.

<u>BÀI 1.12.</u> Bài 1.2 Đề năm 2012.

Giải phương trình: $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$.

<u>BÀI 1.13.</u> Bài 1.1 Đề năm 2013.

Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$.

<u>BÀI 1.14.</u> Bài 1.1 Đề năm 2014.

Giải phương trình: $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8$.

B. Đề thi toán vòng 2 (Toán cho chuyên Toán và chuyên Tin):

BÀI 2.1. **Bài 2.1 Đề năm 2000.**
Giải phương trình: $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$.

BÀI 2.2. **Bài 2 Đề năm 2001.**
Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

BÀI 2.3. **Bài 1.1 Đề năm 2002.**
Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

BÀI 2.4. **Bài 1 Đề năm 2004.**
Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2$.

BÀI 2.5. **Bài 1 Đề năm 2005.**
Giải phương trình: $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$.

BÀI 2.6. **Bài 1.1 Đề năm 2009.**
Giải phương trình: $14\sqrt{x+35}+6\sqrt{x+1}=84+\sqrt{x^2+36x+35}$.

BÀI 2.7. **Bài 1.1 Đề năm 2010.**
Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4$.

BÀI 2.8. **Bài 1.1 Đề năm 2011.**
Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$.

BÀI 2.9. **Bài 1.1 Đề năm 2012.**
Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x$.

BÀI 2.10. **Bài 1.2 Đề năm 2013.**
Giải phương trình: $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.

Chuyên đề 3: Phương trình nghiệm nguyên.

A. Đề thi toán vòng 1:

BÀI 1.1. **Bài 2.2 Đề năm 2000.**
Tìm tất cả các giá trị của a (a là số thực) để phương trình:

$$2x^2-\left(4a+\frac{11}{2}\right)x+4a^2+7=0$$

có ít nhất một nghiệm nguyên.

BÀI 1.2. **Bài 1 Đề năm 2001.**
Tìm các giá trị nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $(y+2)x^2+1=y^2$.

BÀI 1.3. **Bài 3 Đề năm 2002.**
Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2002 là một số chính phương.

<u>BÀI 1.4.</u> Bài 3 Đề năm 2003.
Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

<u>BÀI 1.5.</u> Bài 1.2 Đề năm 2004.
Tìm nghiệm nguyên của hệ: $\begin{cases} 2y^2 - x^2 - xy + 2y - 2x = 7 \\ x^3 + y^3 + x - y = 8 \end{cases}$.

<u>BÀI 1.6.</u> Bài 3 Đề năm 2005.
Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x + y) = 1740$.

<u>BÀI 1.7.</u> Bài 3 Đề năm 2006.
Tìm số tự nhiên gồm 4 chữ số thoả mãn đồng thời hai tính chất:

1. Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6.
2. Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 17.

<u>BÀI 1.8.</u> Bài 2.1 Đề năm 2008.
Tìm tất cả các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.

<u>BÀI 1.9.</u> Bài 2.2 Đề năm 2008.
Tìm tất cả các số nguyên p sao cho phương trình $2x^2 - (p+1)x + p + 2008 = 0$ có các nghiệm là những số nguyên.

<u>BÀI 1.10.</u> Bài 2.1 Đề năm 2010.
Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) + 4xy + 2(x+y)(1+xy) = 25$$

<u>BÀI 1.11.</u> Bài 2.1 Đề năm 2011.
CMR không tồn tại các bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức: $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

<u>BÀI 1.12.</u> Bài 2.2 Đề năm 2011.
Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức: $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$

<u>BÀI 1.13.</u> Bài 2.1 Đề năm 2012.
Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$(x + y + 1)(xy + x + y) = 5 + 2(x + y)$

<u>BÀI 1.14.</u> Bài 2.2 Đề năm 2014.
Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x + y) + x + y = 3 + xy$

<u>B. Đề thi toán vòng 2:</u>

<u>BÀI 2.1.</u> Bài 1.1 Đề năm 2000.
Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn đẳng thức: $y(x-1) = x^2 + 2$.

<u>BÀI 2.2.</u> Bài 1.2 Đề năm 2001.
Tìm các số nguyên không âm x, y thoả mãn đẳng thức: $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$.

<u>BÀI 2.3.</u> Bài 1.2 Đề năm 2002.
Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + xy + y = 9$.

<u>BÀI 2.4.</u> Bài 3 Đề năm 2003.
Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

<u>BÀI 2.5.</u> Bài 3.1 Đề năm 2006.
Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$.

<u>BÀI 2.6.</u> Bài 2.1 Đề năm 2007.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 + 2xy$.

<u>BÀI 2.7.</u> Bài 2.2 Đề năm 2007.

Tìm tất cả các số nguyên tố p mà $p^4 + 2$ cũng là số nguyên tố.

<u>BÀI 2.8.</u> Bài 2.1 Đề năm 2008.

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$.

<u>BÀI 2.9.</u> Bài 2.2 Đề năm 2008.

Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho $\dfrac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}$ là một số nguyên.

<u>BÀI 2.10.</u> Bài 2.1 Đề năm 2009.

Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số sau đều là số nguyên tố:

$$n+1,\ n+5,\ n+7,\ n+13,\ n+17,\ n+25,\ n+37.$$

<u>BÀI 2.11.</u> Bài 2.1 Đề năm 2010.

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^2 + 391$ là số chính phương.

<u>BÀI 2.12.</u> Bài 2.1 Đề năm 2013.

Tìm tất cả các số nguyên (x, y) thỏa mãn $5x^2 + 8y^2 = 20412$.

Chuyên đề 4: Các bài toán số học.

<u>A. Đề thi toán vòng 1:</u>

<u>BÀI 1.1.</u> Bài 3 Đề năm 2006.
Tìm số tự nhiên gồm 4 chữ số thoả mãn đồng thời hai tính chất:

1. Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6.
2. Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 7.

<u>BÀI 1.2.</u> Bài 2. 2 Đề năm 2007.

Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a + 1$ và $b + 2007$ chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

<u>BÀI 1.3.</u> Bài 2. 1 Đề năm 2008.

Tìm tất cả các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 và $\overline{abc}-\overline{bda}=650$.

<u>BÀI 1.4.</u> Bài 2.1 Đề năm 2009.

Tìm chữ số tận cùng của số $13^{13}+6^{6}+2009^{2009}$.

<u>BÀI 1.5.</u> Bài 2.2 Đề năm 2010.

Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a, và ký hiệu là [a]. CMR với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+..............+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n.$$

<u>BÀI 1.6.</u> Bài 2.2 Đề năm 2013.

Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101.

<u>B. Đề thi toán vòng 2:</u>

<u>BÀI 2.1.</u> Bài 2.2 Đề năm 2000.

Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ có tính chất: f(1), f(4), f(9) là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng khi đó a, b, c là các số hữu tỷ.

<u>BÀI 2.2.</u> Bài 1.1 Đề năm 2001.

Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ có tính chất: f(x) nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên. Hỏi các hệ số a, b, c có nhất thiết là số nguyên không? Tại sao?

<u>BÀI 2.3.</u> Bài 3 Đề năm 2002.

Cho mười số nguyên dương 1, 2, 3, …, 10. Sắp xếp 10 số đó một cách tuỳ ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

<u>BÀI 2.4.</u> Bài 5 Đề năm 2004.

Với số thực a ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất khong vượt quá a và ký hiệu [a]. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, …., x_n, …$ được xác định bởi công thức:

$$x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right].$$

Hỏi trong 200 số $\{x_0, x_1, x_2, …., x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0? (Cho biết $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$).

<u>BÀI 2.5.</u> Bài 3.2 Đề năm 2006.

Ký hiệu [x] là phần nguyên của số x (số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có:

$$\left[\sqrt[3]{72n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{9n}+\sqrt[3]{9n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{72n+7}\right].$$

<u>BÀI 2.6.</u> Bài 2.2 Đề năm 2009.
Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp

$M = \{(16, 2), (4, 32), (6, 62), (78, 8)\}$ bằng cặp số $(a + c, b + d)$, trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số

$$M_1 = \{(2018, 702), (844, 2104), (1056, 2176), (2240, 912)\}.$$

<u>BÀI 2.7.</u> Bài 2.1 Đề năm 2011.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $n + \left[\sqrt[3]{n - \frac{1}{27}} + \frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên, trong đó ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của a.

<u>BÀI 2.8.</u> Bài 2.1 Đề năm 2012.

Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$

<u>BÀI 2.9.</u> Bài 2.2 Đề năm 2014.
Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng x = y.

Chuyên đề 5: Bất đẳng thức.

A. Đề thi toán vòng 1 (Toán chung):

BÀI 1.1. Bài 4 Đề năm 2000.

Cho x, y là hai số thực bất kỳ khác không. CMR: $\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

BÀI 1.2. Bài 5 Đề năm 2001.

Với x, y, z là những số thực dương, hãy tìm GTLN của biểu thức:

$$M = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

BÀI 1.3. Bài 4 Đề năm 2002.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{1 + xy} + \frac{1}{1 + yz} + \frac{1}{1 + zx}$, trong đó x, y, z là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

BÀI 1.4. Bài 5 Đề năm 2003.

x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện: $x + y + z + xy + yz + zx = 6$.

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

BÀI 1.5. Bài 5 Đề năm 2004.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + \frac{1}{4}(x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2y^2)^2$.

BÀI 1.6. Bài 5 Đề năm 2005.

Giả sử x, y, z là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{z^4}{1 + z^4\left(x^4 + y^4\right)}$.

BÀI 1.7. Bài 2 Đề năm 2006.

Với những giá trị của x thoả mãn điều kiện $x \ge -\frac{1}{2}$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x+3} - 2x$.

BÀI 1.8. Bài 4 Đề năm 2007.

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. CMR:

$$\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \ge \frac{1}{a+b+c}.$$

BÀI 1.9. Bài 4 Đề năm 2008.

Giả sử a, b là các số nguyên dương thay đổi thỏa mãn $\frac{ab+1}{a+b} < \frac{3}{2}$.

Hãy tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{a^3b^3+1}{a^3+b^3}$.

BÀI 1.10. Bài 2.2 Đề năm 2009.

Với a, b là những số thực dương, tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)} + \sqrt{b(4b+5a)}}.$$

BÀI 1.11. Bài 4 Đề năm 2009.

Với a, b, c là những số thực dương, CMR:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}.$$

BÀI 1.12. Bài 2 Đề năm 2010.

Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \frac{9}{4}$, hãy tìm GTNN của biểu thức $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$.

BÀI 1.13. Bài 5 Đề năm 2011.

Với x, y là những số thực dương, tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}.$$

BÀI 1.14. Bài 2.2 Đề năm 2012.

Với x, y là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\geq 4$, tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}.$$

BÀI 1.15. Bài 5 Đề năm 2012.

Giả sử a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a\leq b\leq 3\leq c, c\geq b+1, a+b\geq c$, tìm GTNN của biểu thức: $Q=\dfrac{2ab+a+b+c\left(ab-1\right)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

BÀI 1.16. Bài 5 Đề năm 2013.

Với a, b, c, d là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+bcd+cda+dab=1$, tìm GTNN của biểu thức: $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9d^3$.

BÀI 1.17. Bài 5 Đề năm 2014.

Giả sử a, b, c, d là những số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $2abc\left(a+b+c\right)\leq\dfrac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

B. Đề thi toán vòng 2 (Toán chuyên):

BÀI 2.1. Bài 1.2 Đề năm 2000.

Cho cặp số (x, y) thoả mãn các điều kiện: $-1\leq x+y\leq 1, \quad -1\leq xy+x+y\leq 1$.

Chứng minh rằng: $|x|\leq 2, \quad |y|\leq 2$.

BÀI 2.2. Bài 4 Đề năm 2002.

Tìm GTNN của biểu thức: $P=\dfrac{4a}{b+c-a}+\dfrac{9b}{a+c-b}+\dfrac{16c}{a+b-c}$, trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

BÀI 2.3. Bài 5 Đề năm 2003.

Số thực x thay đổi và thoả mãn điều kiện $x^2+(3-x)^2\geq 5$.

Tìm GTNN của biểu thức: $P=x^4+(3-x)^4+6x^2(3-x)^2$.

BÀI 2.4. Bài 3 Đề năm 2004.

Tìm GTNN của biểu thức: $P=\dfrac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)(y-1)}$, trong đó x >1, y>1.

BÀI 2.5. Bài 3 Đề năm 2005.

Giả sử x, y là những số không âm thoả mãn điều kiện: $x^2+y^2=1$.

1. Chứng minh rằng: $1\leq x+y\leq 2$.
2. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P=\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}$.

BÀI 2.6. Bài 1.2 Đề năm 2007.

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $b^2+c^2\le a^2$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

BÀI 2.7. Bài 5 Đề năm 2008.

Cho phương trình: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+........+a_{n-1}x+a_n=0$ (1), trong đó các hệ số a_0, a_1, a_2,………, a_n chỉ nhận một trong ba giá trị 0, hoặc 1, hoặc -1 và $a_0\ne 0$. CMR nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $\left|x_0\right|<2$.

BÀI 2.8. Bài 3 Đề năm 2009.

Giả sử x, y, z là những số thực thỏa mãn điều kiện $0\le x,y,z\le 2$ và $x+y+z=3$. Hãy tìm GTLN và NN của biểu thức: $M=x^4+y^4+z^4+12\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)$.

BÀI 2.9. Bài 3 Đề năm 2010.

Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. CMR:

$$\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1.$$

BÀI 2.10. Bài 2.2 Đề năm 2011.

Với x, y, z là những số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$, tìm GTNN:

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}.$$

BÀI 2.11. Bài 2.2 Đề năm 2012.

Tìm GTLN của hàm số $y=3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}$ với $\frac{1}{2}\le x\le\frac{\sqrt{5}}{2}$.

BÀI 2.12. Bài 2.2 Đề năm 2013.

Với x, y là những số thực dương thỏa mãn $x+y\le 1$, tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$$

BÀI 2.13. Bài 2.2 Đề năm 2014.

Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$, tìm GTNN và GTLN của biểu thức: $P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$.