ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN	**TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2016**

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (Vòng 1)

Câu I. (3,5 điểm)

1) **(2,0 điểm)**

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2+y^2\right)=4\\(xy+1)\left(x^2+y^2\right)=4.\end{cases}$$

Suy ra $x+y=1+xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=0.$

- Trường hợp

$$\begin{cases}x=1\\(xy+1)\left(x^2+y^2\right)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\(y+1)\left(1+y^2\right)=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y^3+y^2+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\(y-1)\left(y^2+2y+3\right)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1,\ y=1.$

- Trường hợp

$$\begin{cases}y=1\\(xy+1)\left(x^2+y^2\right)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$$

Đáp số: $x=1,\ y=1.$

2) **(1,5 điểm)**

Điều kiện: $-\frac{2}{7} \le x \le 5.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{8x-3}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}}=\frac{8x-3}{5} \Leftrightarrow (8x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}}-\frac{1}{5}\right]=0$$

- Ta có nghiệm $x=\frac{3}{8}.$
- Giải: $\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}=5 \Leftrightarrow 6x+7+2\sqrt{(7x+2)(5-x)}=25$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-7x^2+33x+10}=9-3x\ \ (x\le 3) \Leftrightarrow -7x^2+33x+10=9x^2-54x+81$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-87x+71=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{71}{16}\ \text{(loại)}.$$

Đáp số: $x=1,\ x=\frac{3}{8}.$

Câu II. (2,5 điểm)

1) **(1,5 điểm)**

Nếu $m=0$ thì hệ vô nghiệm.

Xét $m\ne 0,$ từ hệ suy ra

$$\begin{cases} xy^2 = 3 - \dfrac{2}{m} \\ x^2 + y^2 = 6 - \dfrac{2}{m}. \end{cases}$$

Suy ra

$$xy^2 + 3 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)y^2 = x^2 - 3.$$

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với

$$y^2 = \frac{x^2-3}{x-1} \Leftrightarrow y^2 = x + 1 - \frac{2}{x-1}.$$

Suy ra là $\dfrac{2}{x-1}$ số nguyên nên $x - 1 \in \{\pm 1,\ \pm 2\}$.

- $x - 1 = 1 \to x = 2,\ y^2 = 1 \to xy^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{2}{m} = 1 \Rightarrow \mathrm{m} = 2.$
- $x - 1 = -1 \to x = 0,\ y^2 = 3$ (loại).
- $x - 1 = 2 \to x = 3,\ y^2 = 3$ (loại).
- $x - 1 = -2 \to x = -1,\ y^2 = 1 \to xy^2 = -1 \to \dfrac{2}{m} = 4 \to m = \dfrac{1}{2}.$

Đáp số: $m = 2,\ m = \dfrac{1}{2}.$

2) **(1,0 điểm)**

Ta có $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ suy ra $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$

- Ta có

$$5 = 1^2 + 2^2 = x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2^2}{y^2}\right) + \left(y^2 - x^2\right)\frac{2^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow 5 \geq 2x^2\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{y}}{2}\right)^2 + \left(y^2 - x^2\right)\frac{2^2}{y^2} \geq 2x^2 + y^2 - x^2 = x^2 + y^2\ (1)$$

- Ta có

$$17 = 1^4 + 2^4 = x^4\left(\frac{1^4}{x^4} + \frac{2^4}{y^4}\right) + \left(y^4 - x^4\right)\frac{2^4}{y^4}$$

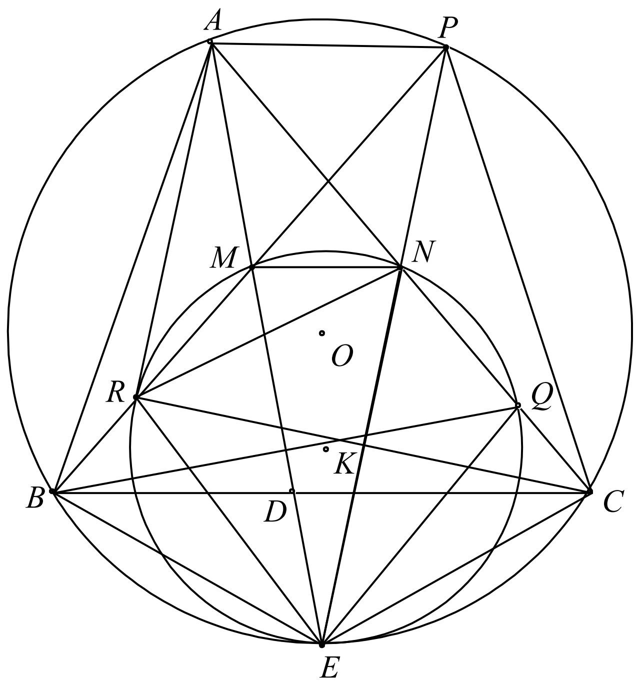
$$\Rightarrow 17 \geq 2x^4\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{y}}{2}\right)^4 + \left(y^4 - x^4\right)\frac{2^4}{y^4} \geq 2x^4 + y^4 - x^4 = x^4 + y^4\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x^4+y^4+x^2+y^2=x^2\left(1+x^2\right)+y^2\left(1+y^2\right)\le 22.$$

Đáp số: $P_{\max}=22$ khi $x=1,\ y=2.$

Câu III. (3 điểm)



1) (**1,5 điểm**) Ta có $\widehat{MPN}=\widehat{BAE}=\widehat{CAE}$ suy ra tứ giác $APNM$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{ANM}=\widehat{APM}=\widehat{ACB}$ suy ra $MN \parallel BC$ nên N là trung điểm của $AC.$

2) (**1,0 điểm**) Từ $MN \parallel BC$ và tứ giác $MNQE$ nội tiếp suy ra $\widehat{MEQ}=\widehat{MNA}=\widehat{ACB}=\widehat{AEB}$ nên $\Delta AEB=\Delta AEQ\ \left(g-c-g\right).$ Từ đó dễ thấy $B,\ Q$ đối xứng nhau qua $AE.$

3) (**0,5 điểm**) Tương tự như phần 2), ta có $\widehat{REN}=\widehat{PMN}=\widehat{PBC}=\widehat{PEC}$ suy ra $\Delta PRE=\Delta PCE\ \left(g-c-g\right)$ nên $R,\ C$ đối xứng nhau qua $PE.$ Từ đó $NR=NC=NA$ suy ra $\widehat{ARC}=90^\circ.$

Câu IV. (1 điểm)

- Giả sử $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{100}$ là một hoán vị tùy ý của các số $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100.$ Ta chia thành 10 nhóm, mỗi nhóm 10 số hạng liên tiếp

  $S_1=x_1+x_2+\cdots+x_{10},\ S_2=x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{20},\ldots,S_{10}=x_{91}+x_{92}+\cdots+x_{100}.$

  Ta có $\sum_{i=1}^{10}S_i=\sum_{i=1}^{100}x_i=\sum_{i=1}^{100}i=\frac{100.101}{2}=5050$ nên có ít nhất một $S_i\ge\frac{5050}{10}=505.$

  Vậy $a=505$ là một số "đẹp".

- Ta xét một hoán vị đặc biệt $100, 1, 99, 2, 98, 3, \ldots, 51, 50,$ khi đó tổng 10 số liên tiếp hoặc bằng 505 (nếu số đầu tiên là lớn nhất) hoặc bằng 500 (nếu số đầu là số nhỏ nhất) suy ra nếu $a > 505$ thì a không là số "đẹp". Vậy đáp số $a_{\max} = 505.$