Chuyên đề: PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ - Phần I

Phương trình vô tỉ là bài toán thường gặp trong các kỳ thi của THCS và THPT, đặc biệt là các kỳ thi học sinh giỏi và thi vào các trường THPT chuyên năng khiếu.

A. Định nghĩa:

Phương trình vô tỉ là phương trình có chứa ẩn trong dấu căn.

B. Các phương pháp giải thường sử dụng:

1. Biến đổi đẳng thức.
2. Lũy thừa.
3. Đặt ẩn phụ.
4. Nhân liên hợp.
5. So sánh.

Việc nắm vững các phương pháp giải, nhận biết dấu hiệu và kỹ thuật là tiền đề trong việc giải quyết các bài toán thực tế. Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu chi tiết từng phương pháp trên.

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC:

Trong phương pháp này ta sử dụng các hằng đẳng thức, các phép thêm bớt hợp lý để biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình tích, từ đó được các phương trình đơn giản hơn.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$ (1)

Giải: $(1) \leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - 3\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$

Giải tiếp ta được $x = 2\sqrt{2}$

Chú ý: $(a+u)(b+v) = au + bv + ab + uv$

$(1-u)(1-v) = 1 - u - v + uv$

$(1-u)(1-v)(1-t) = 1 - u - v - t + uv + vt + tu - uvt$

Các hằng đẳng thức này thường được khai thác nhiều trong bài toán giải phương trình vô tỉ và cụ thể là trong bài toán trên. Sau đây là một số bài toán tương tự:

a) Giải phương trình: $(2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2 + 9x + 7$

Đáp số: x = $1 + 2\sqrt{2}$

b) Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$ (2)

$(2) \leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2+1} - 2x + 1\right) = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x + 3\sqrt[3]{x+7}.\left(\sqrt[3]{x+7} + 1\right) = 19$ (3)

Giải: $(3) \leftrightarrow 1 + (x+7) + 3\sqrt[3]{x+7}\left(\sqrt[3]{x+7} + 1\right) = 27$

$\leftrightarrow \left(1 + \sqrt[3]{x+7}\right)^3 = 27 \rightarrow x = 1$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3} \qquad (4)$$

Giải: Điều kiện xác định: $x \geq 2$

$$(4) \leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}\right)=0 \to x=2$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Giải các phương trình sau:

1) $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$
2) $2x\sqrt{2x-1}=3x^2-2x+1$
3) $1+2\sqrt{x+3}=x+4\sqrt{2x-1}$
4) $x+4+\sqrt{4-x^2}=3\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$
5) $\sqrt[4]{x^2+15}=\frac{4x+\sqrt{x^2+15}}{2(x+1)}$
6) $(x^2+x+2)\sqrt{x+3}=x^2+5x+2$
7) $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

1) $PT \leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2\right)=0$
2) $PT \leftrightarrow x^2+2x\sqrt{2x-1}+2x-1=4x^2$

$$\leftrightarrow (x+\sqrt{2x-1})^2=(2x)^2 \to x=1$$

3) $PT \leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+1\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}+2\right)^2 \to x=1$
4) $PT \leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}-2\right)=0$
5) $PT \leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x^2+15}-2\right)\left(\sqrt[4]{x^2+15}-2x\right)=0$
6) Chia 2 vế cho x rồi biến đổi về phương trình tích:

$$\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\left(\sqrt{x+3}-\frac{2}{x}\right)=0$$

7) $PT \leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}-1\right)^2}=4$

$$\left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4 \to \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

Một số bài tập thêm:

8) (*Thi thử chuyên KHTN 2014, đợt 2, vòng 1*):

$$\sqrt{\frac{3x+1}{4x}}+2\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{3x^2+x}.$$

9) (*Thi thử chuyên KHTN 2016, đợt 2, vòng 1*):

$$2x\sqrt{x+3}=15x^2-9x-2.$$

10) (*Thi thử chuyên KHTN 2016, đợt 2, vòng 2*):

$$(x+6)\sqrt{x+3}=27x^3-3x-10.$$

11) (*Thi thử chuyên KHTN 2016, đợt 3, vòng 2*):

$$\sqrt{x^2+x-2}+3\sqrt{x+2}=2\sqrt{x-1}+x+4.$$

II. PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA:

Trong phương pháp này ta đưa phương trình có chứa căn về phương trình đa thức bằng phép nâng lên lũy thừa. Thường đưa về phương trình bậc 2, bậc 3, bậc 4 có nghiệm đẹp.

Chú ý: Khi lũy thừa bậc chẵn cần chú ý điều kiện 2 vế phải cùng dấu hoặc có thể dùng phương trình hệ quả rồi thử lại

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5\sqrt{x}$

Giải: Điều kiện $x \geq 0$. Bình phương 2 vế ta được:

$$2\sqrt{(x+3)(x+8)}=23x-11$$

$$\leftrightarrow 4(x^2+11x+24)=(23x-11)^2 \text{ (điều kiện } x \geq \tfrac{23}{11})$$

Từ đó $\rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x-\frac{1}{x} \geq 0 \\ 1-\frac{1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (*)

Khi đó: $PT \leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}+1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0$

- Trường hợp 1: $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0 \rightarrow x=1$

- Trường hợp 2: $\sqrt{x+1}+1=\sqrt{\frac{x+1}{x}} \leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+x\right)^2=0$

Thử lại điều kiện (*) ta được các nghiệm là: $x=1$ và $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Chú ý: Khi giải điều kiện xác định quá phức tạp hoặc mất nhiều thời gian ta chỉ cần nêu ra điều kiện xác định rồi sau khi tìm được các nghiệm ta chỉ việc thử lại nếu thấy thỏa mãn thì kết luận nghiệm, nếu không thỏa thì loại (nghiệm đó gọi là nghiệm ngoại lai).

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^3}$

Giải: Điều kiện: $x \geq 1$. Bình phương 2 vế ta được:

$$PT \leftrightarrow x^3 = x^2 + x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(x^2-1)}$$

$$\leftrightarrow \left(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1\right)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

Giải: Lập phương 2 vế rồi giản ước ta được:

$$\sqrt[3]{x^2-1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=x \qquad (*)$$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}.\sqrt[3]{5x}=x$$

Do đó ta có: $4x^2 = 5 \rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Nhận xét: Trong ví dụ 4 ta đã thế phương trình ban đầu vào (*) để được phương trình hệ quả, từ đó làm đơn giản phương trình.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$ Đ/s: $x=-1$
2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$ Đ/s: $x=-2$
3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$ Đ/s: $x=1$
4) *(Kiểm tra chuyên KHTN, đợt 2, 2012-2013)*
$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$. Đ/s: $x=5$
5) *(Thi thử chuyên KHTN, đợt 2, 2014-2015)*
$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$. Đ/s: $x=-1;2$
6) *(Kiểm tra chuyên KHTN, đợt 2, 2012-2013)*
$\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. Đ/s: $x=1$

Kết luận: Bài tập dạng này tương đối đơn giản. Tuy nhiên, dạng này thường kèm việc áp dụng thêm một số phương pháp khác. Cần lưu ý, học sinh cũng hay bị mất điểm vì quên đặt điều kiện khi lũy thừa bậc chẵn.

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ:

Thường gặp các trường hợp sau: $\begin{cases} \text{1 ẩn phụ} \\ \text{2 ẩn phụ} \\ \text{ẩn phụ lượng giác} \end{cases}$

Mục đích:

- Giải trực tiếp tìm ra ẩn phụ;
- Đưa về phương trình đẳng cấp bậc 2: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$
- Đưa về hệ phương trình;
- Đưa về hệ tạm.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$

Giải: điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Đặt : $t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \rightarrow t^2 = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 3t = 0 \rightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 3$$

Giải tiếp ta được $x = \frac{6}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$

Giải: điều kiện : $x \geq -1$

$$5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$$

$$\leftrightarrow 5\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1} = 2(x^2-x+1) + 2(x+1)$$

Đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{x^2-x+1}$; $(a, b \geq 0)$

Phương trình đã cho trở thành:

$$2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \leftrightarrow (a-2b)(2a-b) = 0$$

$$\leftrightarrow a = 2b \text{ hoặc } b = 2a$$

- $a = 2b \rightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1}$
- $b = 2a \rightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2\sqrt{x+1}$

Đáp số: $x\ \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

Giải: Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1} \rightarrow t^3 + 1 = 2x$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2\text{t} \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq t \rightarrow x^3 + 1 \geq t^3 + 1$

do đó $2t \geq 2x \rightarrow t \geq x$ nên $x = t$

Suy ra $x^3 + 1 = 2x \leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

Giải: điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $u = \sqrt[3]{2-x}$ và $= \sqrt{x-1}$; $v \geq 0$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} v=1-u \\ u^3+(1-u)^2=1 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases}$

Từ đó, ta tìm được $x=1, x=2$ và $x=10$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Giải: Đối với những bài toán này ta nghĩ ngay đến việc đặt căn thức bằng t

Đặt $t=\sqrt[3]{7x^2+9x-4} \rightarrow t^3+t=(x+1)^3+(x+1)$

+) $t>x+1$ thì $VT>VP$: phương trình vô nghiệm

+) $t<x+1$ thì phương trình vô nghiệm

+) $t=x+1$ thì $(x+1)^3=7x^2+9x-4$, giải tiếp suy ra nghiệm.

Kết luận: Đặt ẩn phụ là phương pháp được sử dụng nhiều trong các bài toán giải phương trình vô tỉ, đòi hỏi trực quan toán học và kỹ năng biến đổi cần thiết để làm xuất hiện ẩn phụ. Vì vậy, việc giải quyết nhiều loại phương trình khác nhau là việc rất cần thiết.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Giải các phương trình sau:

1) $x^2+\sqrt{x+5}=5$
2) $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$
3) $\sqrt{x(3x+1)}-\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}$
4) $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt{1-x}=1$
5) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}=1$
6) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$
7) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$
8) $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\frac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\frac{8}{3}$
9) *(Thi thử chuyên KHTN 2014, đợt 2, vòng 1):* $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{5-x}=2$.
10) *(Chuyên KHTN 2015):* $x^2-8x-3+6\sqrt{2x+3}=0$.
11) *(Thi thử chuyên KHTN 2015, đợt 3, vòng 1):* $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.
12) *(Chuyên KHTN 2016, đợt 2, vòng 1):* $(3x+1)\sqrt{x+3}=2x^2+3x+3$.

Hướng dẫn giải:

1) Đặt $t=\sqrt{x+5}$ ta được hệ sau : $\begin{cases} x^2+t=5 \\ t^2-x=5 \end{cases}$

   Trừ 2 phương trình cho nhau ta được $(x+t)(x-t+1)=0$

   Từ đó tìm được x
2) Tương tự Ví dụ 4.

3) Ta có:
   - $x = 0$ là nghiệm của phương trình
   - $x \neq 0$ thì chia cả 2 vế cho $\sqrt{x^2}$ ta được
     $\sqrt{3+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2$

   Đặt $u = \sqrt{3+\frac{1}{x}}$ và $v = \sqrt{1-\frac{1}{x}}$ suy ra $\begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$

   Giải hệ trên, từ đó tìm được nghiệm.

4) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

   Đặt $u = \sqrt[4]{1+x}$ và $v = \sqrt{1-x}$ $(u, v \geq 0)$ ta có hệ $\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^4 + v^2 = 2 & (2) \end{cases}$

   Từ (1) suy ra $0 \leq u, v \leq 1 \to u^4 + v^2 \leq u + v \leftrightarrow 2 \leq 1$ (vô lý)
   Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

5) Đặt $u = \sqrt{1-x}$, $v = \sqrt{1-x^2}$ và $t = \sqrt[4]{x^2+x-1}$
   $\to 0 \leq u, v, t \leq 1$
   $\to 1 = \mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{t}^4 \leq \mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{t} = 1$
   Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ (thỏa mãn).

6) Đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} \to \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{t}$

   Do đó phương trình đã cho tương đương: $t + \frac{1}{t} = 2 \leftrightarrow t = 1$

   Từ đó tìm được $x = 1$

7) Đặt $u = \sqrt{5-x}$ và $v = \sqrt{5+u}$
   $\to \begin{cases} u^2 + v = 5 \\ v^2 - u = 5 \end{cases}$. Giải hệ, từ đó tìm được $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$

8) Đặt $u = \sqrt{5-x}$ và $v = \sqrt{5+x}$
   $\to \begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ -4\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) + 2(u+v) = \frac{8}{3} \end{cases}$

9) Đặt $u = \sqrt[4]{x-1}$, $v = \sqrt[4]{5-x}$, suy ra đáp số $x = 1 + \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^4$.

10) Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, suy ra $x = 3$.

11) Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, suy ra $x = 1$ hoặc $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

12) Đặt $t = \sqrt{x+3}$, suy ra $t = 2x$ hoặc $t = x+1$.

    Từ đó tính được $x = 1$.

****

Mời các bạn đón đọc tiếp phần 2.