Chuyên đề: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán giải hệ phương trình thường rất hay gặp trong các kỳ thi vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN. Các bài tập giải hệ phương trình rất phong phú: hệ phương trình mẫu mực, không mẫu mực, hệ đối xứng, hoán vị vòng quanh… Ngay cả các phương pháp giải cũng khá nhiều: dùng hằng đẳng thức, ẩn phụ, lượng giác hóa, bất đẳng thức… Vì lý do đó mà việc học vẹt, học tủ là không thể có. Các bạn cần phải nắm vững được các phương pháp giải và các kỹ thuật đã được thu gọn dưới đây, đồng thời chủ động tìm tòi làm quen với các dạng hệ phương trình để có được phản xạ tốt và đường lối tư duy đúng đắn trong quá trình giải toán. Chúc các bạn thành công!!!

A. Định nghĩa:

1. Hệ phương trình là gì ?

Ta có thể hiểu một cách đơn giản như sau: "Hệ phương trình là một hệ gồm có nhiều phương trình"

Chú ý: Ở đây ta cần tránh nhầm lẫn rằng số ẩn phải luôn bằng số phương trình và một hệ phương trình thì phải có từ 2 ẩn trở lên. Điều này hoàn toàn không chính xác.

Ví dụ : $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x-y=0 \\ 2x^2-5xy+2y^2=1 \end{cases}$ ….

Như vậy, phương trình một ẩn chính là trường hợp đặc biệt của một hệ phương trình với số phương trình và số ẩn đều bằng 1!

2. Giải hệ phương trình

Có nhiều bạn đã từng giải rất nhiều hệ phương trình nhưng lại không hiểu rõ bản chất nên khi gặp những bài toán về hệ phương trình có chứa tham số hoặc biện luận số nghiệm của hệ thì tỏ ra rất lúng túng. Có thể khái quát như sau: *"Giải 1 hệ phương trình là tìm tất cả các bộ nghiệm sao cho chúng thỏa mãn tất cả các phương trình trong hệ".*

B. Các phương pháp giải

Như tác giả đã nêu ở trên, có khá nhiều các phương pháp giải khác nhau. Tuy nhiên, sau khi rút gọn lại thì chỉ còn có 3 phương pháp (việc rút gọn này sẽ giúp cho các bạn học sinh dễ tiếp cận hơn) là:

1. Thế và cộng đại số
2. Đặt ẩn số phụ
3. So sánh

Phương pháp 1: Thế và cộng đại số

- *Mục đích:* Đơn giản hóa các phương trình trong hệ, đưa hệ phương trình đã cho về dạng đơn giản, quen thuộc hơn.
- *Phương pháp chung:* Sử dụng các phép biến đổi đại số sau đây để phân tích một phương trình nào đó trong hệ thành phương trình tích hoặc đơn giản hệ:

- ✓ Nhân, chia, thêm, bớt các lượng thích hợp của biến
- ✓ Dùng hằng đẳng thức
- ✓ Thế hệ số hoặc biểu thức
- ✓ Đưa về phương trình bậc 2 chứa 2 ẩn x, y; từ đó phân tích thành nhân tử. Trường hợp đặc biệt là đưa về phương trình đẳng cấp

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: (Chuyên Toán - Tin KHTN vòng 1 năm 1992)

$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2 y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Phân tích:

Ta nhận thấy 2 phương trình trong hệ không cùng bậc. Tuy nhiên, chúng đều có một đặc điểm chung đó là bậc của chúng đều là 1-2-3. Điều đó dẫn ta đến cách giải sau:

Giải:

+ Nếu $xy = 0$ thì $x = y = 0$ hay $(x, y) = (0,0)$

+ Nếu $xy \neq 0$, chia phương trình (1) cho y^2 và phương trình (2) cho x^2 ta được hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - \dfrac{2}{y} = -3\dfrac{x^2}{y^2} \\ y + \dfrac{2}{x} = -\dfrac{y^2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{2}{y} = -3\dfrac{x^2}{y^2} \\ (x - \dfrac{2}{y})(y + \dfrac{2}{x}) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 - 2y = -3x^2 \\ xy - \dfrac{4}{xy} = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Từ đó ta tìm được $x = -1, y = 1$ và $x = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = -2\sqrt[3]{3}$

Kết luận: hệ phương trình có 2 nghiệm: (x, y) = (-1, 1) ; $(x, y) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt[3]{3}}, -2\sqrt[3]{3}\right)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Phân tích: Để ý kỹ một chút ta thấy phương trình 1 có thể đưa về phương trình tích.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x + y - 2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 - y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

+) Nếu $x = 1$ thì $y = \pm 1$ suy ra $(x, y) = (1,1)$ hoặc $(1, -1)$

+) Nếu $x = 2 - y$ thì thay vào phương trình (2) của hệ ta được:

$(2 - y)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1$ suy ra $x = 1$. Do đó $(x, y) = (1,1)$

Vậy hệ có 2 nghiệm là : (x, y) = $(1,1)$; (x, y) = $(1, -1)$.

Lưu ý: *Cách phân tích một phương trình trong hệ thành phương trình tích từ đó đơn giản hệ phương trình rất hay gặp trong các đề thi!*

Ví dụ 3: Giải hệ sau (THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội):

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2(y+z)=xyz+14 \\ y^3+z^3+y^2(z+x)=xyz-21 \\ z^3+x^3+z^2(x+y)=xyz+7 \end{cases}$$

Phân tích: *Hiển nhiên ở đây là làm mất các số tự do bằng cách cộng 3 phương trình trong hệ lại !*

Giải:

Cộng theo từng vế các phương trình của hệ ta được:

$$2(x^3+y^3+z^3)+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=3xyz$$

Nhóm các số hạng và sử dụng hằng đẳng thức:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z).(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

$$\Rightarrow\ x+y+z=0.$$

Thay trở lại hệ ban đầu ta được: $\begin{cases} y^3=xyz+14 \\ z^3=xyz-21 \\ x^3=xyz+7 \end{cases}$

Đặt $xyz=t$ và nhân theo từng vế ba phương trình của hệ trên, ta được

$$t^3=(t+14)(t-21)(t+7)\Leftrightarrow t=-6$$

Vậy $(x,y,z)=(1,2,-3)$

Một số bài tập vận dụng phương pháp Thế và cộng đại số:

1. (Chuyên KHTN năm 1995) :

   Giải hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$

4. (Chuyên Chu Văn An) :

   Giải hệ: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz-zx=7 \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases}$ (Chuyên Sư Phạm Hà Nội vòng 1 năm 2005-2006)

6. $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-y^2=4x-2y-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2xy=x+y+1 \\ 2yz=y+z+7 \\ 2zx=z+x+2 \end{cases}$ (Chuyên KHTN Toán – Tin năm 1997)

9. $\begin{cases} y^3+y^2x+3x-6y=0 \\ x^2+xy=3 \end{cases}$

10. (Kiểm tra chuyên KHTN 2017)

a) $\begin{cases} x^3=y^3+7y \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3-x^2y+y^3=7, \\ x^2+x+8=y^3+y. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2+3x=4, \\ 7x^3+x=5y. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=6, \\ y^2+2xy+2x+y=6. \end{cases}$

Hướng dẫn và đáp số:

Câu1: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ (x^3-y^3)+2y^3=x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ (x-y)(x^2+y^2+xy)+2y^3=x+3y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x-y+2y^3=x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ y^3=2y \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được $(x,y)=(1,0)$ hoặc $(-1,0)$

Câu 2: $\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3+12x^2y=20 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^3=27 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ y^3+3(3-y)y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-y}{2} \\ 2y^3-9y^2+7=0 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được: $(x,y)=(1,1);(\frac{5-\sqrt{105}}{8},\frac{7+\sqrt{105}}{4});(\frac{5+\sqrt{105}}{8},\frac{7-\sqrt{105}}{4})$

Câu 3: Phân tích vế trái của phương trình (1) thành nhân tử được:

$(y+x-2)(y-2x+1)=0$. Từ đó ta tìm được $(x,y)=(1,1);(\frac{-4}{5},\frac{-13}{5})$.

Câu 4: $\begin{cases}(x^3+y^3)+(xy^2+x^2y)=15\\(x^3+y^3)-(xy^2+x^2y)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=9\\xy^2+x^2y=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3=27\\xy(x+y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$.

Ta được các nghiệm của hệ là: $(x,y)=(1,2)$; (x, y) = $(2,1)$.

Câu 5: $\begin{cases}x+y+z=6 & (1)\\xy+yz-zx=7 & (2)\\x^2+y^2+z^2=14 & (3)\end{cases}$

Lấy phương trình (3) trừ đi 2 lần phương trình (2) ta được: $(x+z-y)^2=0$.

Hệ pt $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=6\\x+z-y=0\\x^2+y^2+z^2=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=3\\y=3\\x^2+z^2=5\end{cases}\Rightarrow x=1,z=2$ hoặc $x=2,z=1$

Vậy $(x,y,z)=(1,3,2)$ hoặc $(2,3,1)$.

Câu 6: $\begin{cases}x^3+y^3-xy^2=1\\4x^4+y^4=4x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3-xy^2=1 & (1)\\4x^4+y^4=(4x+y)(x^3+y^3-xy^2) & (2)\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow xy(y-x)(3y-x)=0$

Từ đó ta giải ra được $(x,y)=(1,0);(0,1);(1,1)$ và $(\frac{3\sqrt[3]{5}}{5},\frac{\sqrt[3]{5}}{5})$.

Câu 7: Chuyển phương trình (1) thành phương trình tích $(x-y-1)(x+y-3)=0$

Đáp số: $(x,y)=(1,2);(2,1)$ và $(-1,-2)$

Câu 8:

Hệ pt $\Leftrightarrow\begin{cases}4xy=2x+2y+2\\4yz=2y+2z+14\\4zx=2z+2x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)(2y-1)=3\\(2y-1)(2z-1)=15\\(2z-1)(2x-1)=5\end{cases}$

Từ đó ta được $(x,y,z)=(1,2,3)$ hoặc $(0,-1,-2)$.

Câu 9: $\begin{cases}y^3+y^2x+3x-6y=0\\x^2+xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^3+y^2x+(x-2y)(x^2+xy)=0 & (1)\\x^2+xy=3 & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương : $(x+y)(x-y)^2=0$

Từ đó thu được: $x=y=\sqrt{\frac{3}{2}}$ và $x=y=-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 10: Học sinh tự giải.

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ

Phương pháp đặt ẩn phụ cùng với phương pháp thế và cộng đại số thường được sử dụng nhiều trong các đề thi THPT.

Mục đích: Được dùng khi hệ có các thành phần được lặp lại nhiều lần, từ đó ta đưa một hệ phức tạp về một hệ đơn giản và dễ giải hơn.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau (Đề thi chuyên KHTN năm 2000-2001)

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$$

Phân tích: Ta thấy $x.\frac{1}{y}=\frac{x}{y}$ và $x^2+\frac{1}{y^2}=(x+\frac{1}{y})^2-2.x.\frac{1}{y}$.

Từ sự lặp lại của $x+\frac{1}{y}$ và $\frac{x}{y}$ ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ $u=x+\frac{1}{y}, v=\frac{x}{y}$.

Giải: Đk: $y\neq 0$. Đặt $u=x+\frac{1}{y}, v=\frac{x}{y}$

Khi đó hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u^2-v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ u^2+u-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2, v=1 \\ u=-3, v=6 \end{array}\right.$

+) Với $u=2, v=1$ ta có: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}=x.\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$

+) Với $u=-3, v=6$ ta có: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-3 \\ \dfrac{x}{y}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+\dfrac{1}{y}=-3 \\ x=6y \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét: Nếu không muốn đặt ẩn ta có thể giải trực tiếp ra $x+\frac{1}{y}$ và $\frac{x}{y}$ rồi từ đó tính x, y tương tự như trên. Như vậy, việc đặt ẩn phụ thực chất chỉ làm cho hệ trở nên gọn và dễ nhìn nhận hơn.

Việc đặt ẩn phụ như trên được gọi là đặt ẩn phụ "tổng tích". Khi giải tìm được tổng và tích ta thường dùng định lý Viet đảo để đơn giản tiếp biểu thức chứa x, y

Ví dụ 2: Giải hệ pt: $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 & (1) \\ y(y-2x)-2x=10 & (2) \end{cases}$ (*)

Phân tích: Từ phương trình (1) nhiều bạn sẽ nghĩ đến đặt ẩn phụ $u = x + y, v = xy$. Tuy nhiên, khi biến đổi phương trình (2) theo u, v thì sẽ không thể triệt tiêu số hạng $2x$! Từ đó ta nghĩ đến việc làm mất $2x$ bằng cách làm xuất hiện $(x+1)^2$

Giải:

Hệ pt (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 - 2(x+1).(y+1) = 9\end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 = 2(x+1).(y+1)$

$\Leftrightarrow x = -1; x = -2y - 3$

+) $x = -1$ thì $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -4 \end{array}\right.$

+) $x = -2y - 3$ thay vào (1) ta được: $5(y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{\sqrt{5}} - 1 \Rightarrow x = -\dfrac{6}{\sqrt{5}} - 1 \\ y = -\dfrac{3}{\sqrt{5}} - 1 \Rightarrow x = \dfrac{6}{\sqrt{5}} - 1 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x, y) = (-1, 2); (-1, -4); (-\frac{6}{\sqrt{5}} - 1, \frac{3}{\sqrt{5}} - 1)$ và $(\frac{6}{\sqrt{5}} - 1, -\frac{3}{\sqrt{5}} - 1)$.

Ví dụ 3: Xuất phát từ ví dụ trên ta xét giải hệ tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 & (1) \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Nhân (1) với d_2 và (2) với d_1 rồi trừ theo vế ta được phương trình đẳng cấp:

$$(a_1d_2 - a_2d_1).x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1).xy + (c_1d_2 - c_2d_1).y^2 = 0$$

Từ đó giải x theo y rồi thay vào phương trình (1) ban đầu ta tìm được nghiệm.

Như vậy hệ (*) nêu trên chính là 1 trường hợp của dạng tổng quát này. Cách giải hệ như trên được gọi là biến đổi để đưa về phương trình đẳng cấp.

Kết luận: Nhìn chung, phương pháp đặt ẩn phụ khá mạch lạc, rõ ràng; điều cần lưu ý là phải biến đổi khéo léo hợp lý để làm xuất hiện biểu thức đặt ẩn phụ.

Một số bài tập vận dụng phương pháp đặt ẩn phụ:

1. $\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + 4x + y = 0 \\ (x+2)^4 + 5y = 16 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

4. (THPT Chuyên KHTN - 2002)

$\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+y)^4-x^2y^2+3=0 \\ xy(x^2+y^2)+10=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 \\ \sqrt{x+y}+x-y=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Hướng dẫn và đáp số:

Câu 2: Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ (x^2+xy+y^2).(x^2-xy+y^2)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

Đặt ẩn phụ tổng tích và giải tiếp ta được $(x,y)=(1,2);(2,1);(-1,-2)$ và $(-2,-1)$

Câu 3:

Ta có: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y).(1+\dfrac{1}{xy})=\dfrac{9}{2} \\ xy=2, xy=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3, xy=2 \\ x+y=\dfrac{3}{2}, xy=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Từ đó ta giải ra được 4 nghiệm: $(x,y)=(1,2);(2,1);(1,\dfrac{1}{2})$ và $(\dfrac{1}{2},1)$.

Câu 6:

Ta có: $\begin{cases} x^2+4x+y=0 \\ (x+2)^4+5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2+y=4 \\ (x+2)^4+5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2=4-y \\ (4-y)^2+5y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2=4-y \\ y=0, y=3 \end{cases}$

+) $y=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-4$

+) $y=3 \Rightarrow x=-1 \vee x=-3$

Vậy $(x,y)=(2,0);(-4,0);(-1,3)$ và $(-3,3)$.

Câu 7: Đk $x \neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3.\dfrac{1}{x}=0 \\ (x+y)^2-5.(\dfrac{1}{x})^2+1=0 \end{cases}$. Đặt $x+y=a, \dfrac{1}{x}=b$ ta được hệ:

$\begin{cases} a+1-3b=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-1 \\ (3b-1)^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=1 \\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=2, y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Câu 8: Đk: $x \ge -1, y \ge -1, xy \ge 0.$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$

Đặt $x+y=a, \sqrt{xy}=b.$ $(a \ge -2, b \ge 0, a^2 \ge 4b^2)$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+3 \\ 2\sqrt{b^2+b+14}=11-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+3 \\ 3b^2+26b-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=6 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $x=y=3$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 9: Đặt $u=\sqrt{x+y}, v=\sqrt{3x+2y} \quad (u \ge 0, v \ge 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=u^2 \\ 3x+2y=v^2 \end{cases} \Rightarrow x-y=2v^2-5u^2.$ Ta có hệ: $\begin{cases} u-v=-1 \\ u+2v^2-5u^2=v \end{cases}$

Câu 10:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy(x^2+y+1)=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $x^2+y=a, xy=b$ ta được:

$$\begin{cases} a+b(a+1)=-\dfrac{5}{4} \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-ab=0 \\ b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=-\dfrac{5}{4} \\ a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Từ đó ta tìm được $(x,y)=(1,-\frac{3}{2});(\sqrt[3]{\frac{5}{4}},-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}).$

Câu 1, 4 và 5: đều có chung một cách giải là đặt $u=x+y, v=xy$ (Bạn đọc tự giải tiếp)

Học sinh tự luyện tập thêm:

Câu 11: (Chuyên KHTN 2017, vòng 2)

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1, \\ x+x^2y=2y^3. \end{cases}$

(Gợi ý: dẫn về phương trình $x^3-2y^3+xy^2=0$, sau đó xét riêng $y=0$, $y \ne 0$ và đặt $t=\dfrac{x}{y}$.)

Câu 12: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^2y^2-xy^2-xy=2, \\ x^2y^2+xy^2+xy-y^2-2y=2. \end{cases}$

(Gợi ý: đặt $xy=a$, $y+1=b$.)

***Phương pháp 3*: So sánh**

Phương pháp so sánh tuy không được sử dụng nhiều như phương pháp thế và cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ; nhưng khi áp dụng vào bài toán ta sẽ có cách giải khá độc đáo!

Để nắm bắt tốt phương pháp này cần phải biết một số bất đẳng thức cổ điển như AM-GM (hay còn gọi là bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopxki,...).

BĐT Cauchy: Với các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta luôn có bđt sau:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \text{ (BĐT trung bình cộng - trung bình nhân)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$$

BĐT Bunhiacopxki: Với 2 bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ bất kỳ ta luôn có bđt:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \ge (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a_i = kb_i \text{ với } i = 1, 2, ..., n$$

Lưu ý: Một đặc điểm quan trọng là với việc dùng phương pháp so sánh thì nghiệm luôn là duy nhất !

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình (THPT Lê Quý Đôn - Đà Nẵng năm 2013 - 2014):

$$\begin{cases} (x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4xy \\ \sqrt[3]{x - 1} - \sqrt{y - 1} = 1 - x^3 \end{cases}$$

Phân tích: Ta thấy ở đây các phần tử có bậc khá cao, đồng thời cũng không xuất hiện sự lặp lại nên 2 phương pháp trước không sử dụng được. Mặt khác ta nhận thấy $(x, y) = (1,1)$ là nghiệm mà từ đkxđ suy ra $x \ge 1, y \ge 1$ .Với việc dùng phương pháp so sánh ta cần chứng minh đó là nghiệm duy nhất!

Giải: Đk: $x \ge 1, y \ge 1 \Rightarrow xy \ge 1$ (*)

$4xy = (x^4 + 1).(y^4 + 1) \ge 4x^2 y^2 \Leftrightarrow 0 \le xy \le 1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $xy = 1 \Rightarrow x = y = 1$

Vậy hệ có duy nhất nghiệm $(x, y) = (1,1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau (THPT Chuyên KHTN - 1996):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

Giải: Đk: $\frac{1}{2} \ge x, y > 0$.

Giả sử: $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{2-\frac{1}{y}} < \sqrt{2-\frac{1}{x}} \end{cases}$

Suy ra: $2 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{y}} < \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2$ (Vô lý).

Tương tự $x < y$ (Vô lý) $\Rightarrow x = y$. Khi đó ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (1,1)$.

Nhận xét: Ngoài ra ta cũng có thể trừ theo vế 2 phương trình trong hệ để làm xuất hiện nhân tử chung $(x - y)$.

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$

Phân tích: Đây là hệ đối xứng xoay vòng. Cách làm được sử dụng nhiều nhất là giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ rồi từ mối liên hệ của các phương trình trong hệ ta suy ra $x = y = z$

Giải:

Ta có: $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 & (1) \\ y = \sqrt{z} + 1 & (2) \\ z = \sqrt{x} + 1 & (3) \end{cases}$ Điều kiện: $x, y, z > 0$

Do vai trò của các biến là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử x là số bé nhất trong 3 số x, y, z . Khi đó, do $x \le y$ nên từ phương trình (1) và (2) của hệ ta có: $y \le z.$

Khi đó từ phương trình (2) và (3) của hệ suy ra $z \le x.$ Vậy $x = y = z.$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $x = y = z = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 4: (THPT Chuyên SPHN Năm 2002-2003)

Giải hệ sau: $\begin{cases} x + y = \sqrt{4z-1} \\ y + z = \sqrt{4x-1} \\ z + x = \sqrt{4y-1} \end{cases}$

Phân tích: Ngoài cách giải như ở ví dụ 3, từ đặc điểm của các số hạng trong hệ ta có cách giải độc đáo sau:

Giải: Nhân hai vế của mỗi phương trình với 2 rồi cộng theo từng vế các phương trình của hệ ta được:

$$(\sqrt{4x-1}-1)^2+(\sqrt{4y-1}-1)^2+(\sqrt{4z-1}-1)^2=0 \;\Rightarrow\; x=y=z=\frac{1}{2}\ .$$

Kết luận: Nhìn chung cách giải bằng phương pháp so sánh thường khá ngắn gọn và thu được nghiệm duy nhất.

Một số bài tập vận dụng phương pháp So sánh:

1. *(THPT Chuyên SP Hà Nội -2004)*

$$\begin{cases}2x^{2004}=y^6+z^6\\2y^{2004}=z^6+x^6\\2z^{2004}=x^6+y^6\end{cases}$$

2. *(THPT Chu Văn An và Hà Nội-Amsterdam năm 2004)*

$$\begin{cases}\sqrt{x+19}-\sqrt{y+6}=1\\\sqrt{y+19}-\sqrt{x+6}=1\end{cases}$$

3. *(PTNK-ĐHQG TP Hồ Chí Minh - 2013)*

Tìm 3 số dương (x,y,z) thỏa mãn hệ pt:

$$\begin{cases}3x^2+2y+1=2z(x+1)\\3y^2+2z+1=2x(y+1)\\3z^2+2x+1=2y(z+1)\end{cases}$$

4. $$\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{4y-3}=2x\\\sqrt{2y-1}+\sqrt[4]{4x-3}=2y\end{cases}$$

5. $$\begin{cases}x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y\\y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x\end{cases}$$

6. $$\begin{cases}2x^2=y+\dfrac{1}{y}\\2y^2=x+\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Hướng dẫn và đáp số:

Câu 1: Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2x^{2004}=y^6+z^6 & (1)\\2y^{2004}=z^6+x^6 & (2)\\2z^{2004}=x^6+y^6 & (3)\end{cases}$

Giả sử $x>y$. Từ pt (1) và (2) của hệ suy ra: $y^6>x^6\Rightarrow y>x$ (Vô lý).

Tương tự suy ra ta chứng minh được: $x=y=z$

Vậy $x=y=z=1$

Câu 2: Đk: $x,y\geq -6$

Từ hệ $\Rightarrow (x-y).(\dfrac{1}{\sqrt{x+19}+\sqrt{y+19}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}})=0 \Leftrightarrow x=y$

Khi đó ta được: $\sqrt{x+19}=\sqrt{x+6}+1$.

Giải phương trình này được $x=30$. Vậy $x=y=30$

Câu 3: Cộng theo vế các phương trình trong hệ rồi nhóm thích hợp ta được:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 4: Đk: $x,y\ge\frac{3}{4}$. Cộng theo vế các phương trình trong hệ ta được:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{4x-3}+\sqrt{2y-1}+\sqrt[4]{4y-3}=2x+2y$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x-1.1}\le\frac{(2x-1)+1}{2}=x$$

$$\sqrt{2y-1}=\sqrt{2y-1.1}\le\frac{(2y-1)+1}{2}=y$$

$$\sqrt[4]{4x-3}=\sqrt[4]{4x-3.1.1.1}\le\frac{(4x-3)+1+1+1}{4}=x$$

$$\sqrt[4]{4y-3}=\sqrt[4]{4y-3.1.1.1}\le\frac{(4y-3)+1+1+1}{4}=y$$

Từ đó suy ra: $VT=\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{4x-3}+\sqrt{2y-1}+\sqrt[4]{4y-3}\le 2x+2y=VP$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 5: Cộng theo vế các phương trình trong hệ ta được:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$$

Ta có: $x^2-2x+9=(x-1)^2+8\ge 8\Rightarrow\sqrt[3]{x^2-2x+9}\ge 2\Rightarrow\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}\le xy$

Tương tự ta được: $\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le xy$

Suy ra: $VT\le 2xy\le x^2+y^2=VP$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 6: Dễ thấy $x,y>0$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2y=y^2+1\\2y^2x=x^2+1\end{cases}\Rightarrow 2xy(x-y)=y^2-x^2$

$\Leftrightarrow(x-y).(2xy+x+y)=0\Leftrightarrow x=y$ (do $x,y>0$)

Khi đó ta được: $2x^3=x^2+1\Leftrightarrow x=1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x,y)=(1,1)$.

Học sinh tự luyện tập thêm:

Câu 7: (Chuyên Chu Văn An và Hanoi-Amsterdam 2008-2009)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+19}-\sqrt{y+6}=(m-2008)y+1, \\ \sqrt{y+19}-\sqrt{x+6}=(m-2008)x+1. \end{cases}$

a) Giải hệ khi $m=2008$.

b) Chứng minh rằng khi $m \geq 2008$, thì hệ đã cho có không quá một nghiệm.

(Gợi ý: trong cả hai câu, hãy chỉ ra $x=y$.)

Câu 8:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x_1^{\ 2}+x_1+1=x_2, \\ x_2^{\ 2}+x_2+1=x_3, \\ \cdots, \\ x_{n-1}^{\ \ 2}+x_{n-1}+1=x_n, \\ x_n^{\ 2}+x_n+1=x_1. \end{cases}$

(Gợi ý: dùng tính chất xoay vòng chỉ ra $x_1=x_2=\cdots=x_n$, và từ đó dẫn ra hệ phương trình không có nghiệm).