ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2015

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I. (3 điểm)

1) Giả sử $a,\ b$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2.$

a) Chứng minh rằng $a+b=-3.$

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45.$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 4x^2+y^2=5xy^2. \end{cases}$$

Câu II. (3 điểm)

1) Tìm các số nguyên $x,\ y$ không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1).$

2) Với $x,\ y$ là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0,$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy}{3y+1}.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E,F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua $IC,IB.$

1) Chứng minh rằng EF song song với $BC.$

2) Gọi M,N,J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE,DF,EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác $A.$ Chứng minh rằng bốn điểm M,P,N,J cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A,J,P thẳng hàng.

Câu IV. (1 điểm)

1) Cho bảng ô vuông 2015×2015. Kí hiệu ô (i,j) là ô ở hàng thứ i, cột thứ j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

i) Số 1 được viết vào ô $(1,1)$,

ii) Nếu số k được viết vào ô $(i,j),(i>1),$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1,j+1)$,

iii) Nếu số k được viết vào ô $(1,j)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(j+1,1)$. (Xem hình 1.)

1	3	6	10	…
2	5	9	…	
4	8	…		
7	…			
…				

Hình 1

Khi đó, số 2015 được viết vào ô (m,n). Hãy xác định m và n.

2) Giả sử $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc\le 4.$ Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).$$

ĐÁP ÁN & THANG ĐIỂM

Câu I. (3 điểm)

1) **(1,5 điểm)**

a) Ta có $\left(a^2-b^2\right)+3(a-b)=0 \Rightarrow a+b=-3(a\neq b)$.

b) Ta có $\left(a^2+b^2\right)+3(a+b)=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=4-3(a+b)=13$

$\Rightarrow (a+b)^2-2ab=13 \Rightarrow ab=-2 \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=-45.$

Chú ý: Học sinh có thể giải bằng định lý Vi - ét.

2) **(1,5 điểm)**

Từ hệ phương trình đã cho ta có $\begin{cases}2xy+3y^2=5xy^2\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$

$\Rightarrow 2xy+3y^2=4x^2+y^2 \Leftrightarrow 4x^2-2y^2-2xy=0 \Rightarrow (x-y)(y+2x)=0.$

- Giải $\begin{cases}x=y\\2x+3y=5xy\end{cases} \Rightarrow 5x=5x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=y=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

- Giải $\begin{cases}y=-2x\\2x+3y=5xy\end{cases} \Rightarrow -4x=-10x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=\frac{2}{5}, y=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là: $(0;0)$; $(1;1)$; $\left(\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

Câu II. (3 điểm)

1) **(1,5 điểm)**

Ta có $a=\dfrac{xy-1}{(x-1)(y-1)}=\dfrac{(x-1)(y-1)+x+y-2}{(x-1)(y-1)}=1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}.$

Ta có $x\geq 2 \Rightarrow x-1\geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}\leq 1,\ y\geq 2 \Rightarrow y-1\geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{y-1}\leq 1$

$\Rightarrow \begin{cases}1<a\leq 3\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\a=3.\end{array}\right.$

- Với $a=2$ ta có $1=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x-1)(y-1)-(x-1)-(y-1)=0$

  $\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=1 \Rightarrow \begin{cases}x-2=1\\y-2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=3.\end{cases}$

- Với $a=3$ ta có $2=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-1} \Leftrightarrow 2(x-1)(y-1)-(x-1)-(y-1)=0$

  $\Leftrightarrow 2xy-3x-3y+4=0 \Leftrightarrow (2x-3)(2y-3)=1 \Rightarrow \begin{cases}2x-3=1\\2y-3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=2.\end{cases}$

2) (**1,5 điểm**)

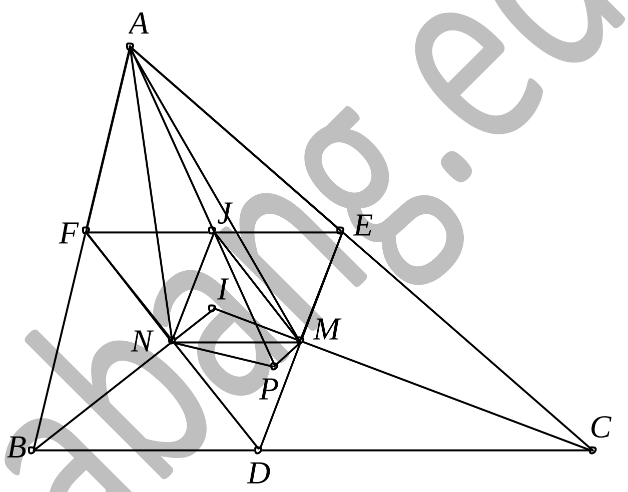
Vì $x^2y^2+2y+1=0 \Rightarrow y \neq 0$ chia hai vế cho y^2 của đẳng thức điều kiện ta thu được: $x^2+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}=0 \Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{y}+1\right)^2=1$. Đặt $u=\frac{1}{y}+1$ ta thu được $x^2+u^2=1$.

Ta có $P=\dfrac{x}{3+\frac{1}{y}}=\dfrac{x}{u+2} \Leftrightarrow (x-Pu)=2P$

$\Rightarrow 4P^2=(x-Pu)^2 \leq (1+P^2)(x^2+u^2)=1+P^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Với $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}$ thì $P=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $P_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Với $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}$ thì $P=\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Vậy $P_{\min}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu III. (3 điểm)



1) (**1 điểm**) Theo tính chất phân giác ta thấy E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB. Từ đó theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{BF}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CA}$ vậy $EF \parallel BC$.

2) (**1 điểm**) Ta có $MPN = MPA + NPA = MEC + NFB = MDC + NDB = 180^\circ - MDN$ $= 180^\circ - MJN$. Suy ra tứ giác $MPNJ$ nội tiếp.

3) (**1 điểm**) Từ tứ giác $MPNJ$ nội tiếp nên suy ra

$MPJ = MNJ = MEJ = EDC = DEC = MPA$. Suy ra A, J, P thẳng hàng.

Câu IV. (1 điểm)

1) (**0,5 điểm**) Theo quy tắc trên, số ở hàng 1 cột *j* bằng $1+2+3+\cdots+j=\frac{j(j+1)}{2}$.

Ta có $\frac{63.64}{2}=2016$. Vậy số 2016 ở hàng 1 cột 63 suy ra số 2015 ở hàng 2 cột 62.

Do đó $m=2, n=62$.

2) (**0,5 điểm**) Ta có $ab+bc+ca+abc\le 4$

$\Leftrightarrow 12+(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc$

$\Leftrightarrow (2+a)(2+b)+(2+b)(2+c)+(2+c)(2+a)\ge (2+a)(2+b)(2+c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}\ge 1.$

Ta có $\dfrac{1}{2+a}=\dfrac{a+b^2+c^2}{(a+1+1)(a+b^2+c^2)}\le\dfrac{a+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$,

tương tự ta có $\dfrac{1}{2+b}\le\dfrac{b+a^2+c^2}{(a+b+c)^2}$, $\dfrac{1}{2+c}\le\dfrac{c+a^2+b^2}{(a+b+c)^2}$.

Cộng 3 bất đẳng thức ta suy ra

$2(a^2+b^2+c^2)+a+b+c\ge(a+b+c)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).$