ĐỀ THI: TOÁN (Vòng II)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2+6x+5}=\frac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}.$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Với x, y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}$, chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 40.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$x^4+2x^2=y^3.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt đường thẳng AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt các đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực của DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, các đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PC, PB lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV. (1 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ luôn tồn tại một cách sắp xếp bộ n số $1, 2, \ldots, n$ thành

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_j \neq \frac{x_i+x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số (i, j, k) mà $1 \leq i < j < k \leq n.$

ĐÁP ÁN TOÁN (vòng II)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \ (1) \\ (x+2y)(4xy+5)=1 \ (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) suy ra $(x+2y)(x^2+4xy+4y^2)=1 \Rightarrow (x+2y)^3=1 \to x+2y=1.$ Ta thu được

hệ $\begin{cases} x+2y=1 \\ xy=-1 \end{cases} \to y(1-2y)=-1 \to 2y^2-y-1=0 \to \left[\begin{array}{l} y=1,\ x=-1 \\ y=-\dfrac{1}{2},\ x=2. \end{array}\right.$

Đáp số: $(x,\ y)\in\left\{(-1,\ 1);\left(2,\ \dfrac{-1}{2}\right)\right\}.$

2) Phương trình đã cho tương đương với

$$(5x^2+6x+6)\sqrt{5x^2+6x+5}=64x^3+4x \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+6x+5}\right)^3+\sqrt{5x^2+6x+5}=(4x)^3+4x$$

Chú ý rằng $a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b.$ Vậy $\sqrt{5x^2+6x+5}=4x\ \ (x\ge 0)$

$\Leftrightarrow 5x^2+6x+5=16x^2 \Leftrightarrow 11x^2-6x-5=0 \Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{-5}{11}$ (loại).

Đáp số: $x=1.$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Suy ra $3x^2-2y^2=1 \to 3x^2-2y^2\equiv 1(\text{mod } 8),\ 3x^2-2y^2\equiv 1(\text{mod } 5)$

Vì $\left.\begin{array}{l} x^2\equiv 0,1,4(\text{mod } 8) \\ y^2\equiv 0,1,4(\text{mod } 8) \end{array}\right\}$ suy ra $\begin{array}{l} 3x^2\equiv 0,\ 3,\ 4(\text{mod } 8) \\ 2y^2\equiv 0,\ 2(\text{mod } 8) \end{array}$ nên $3x^2-2y^2\equiv 0,\ 6,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2(\text{mod } 8).$

Do đó $3x^2-2y^2\equiv 1(\text{mod } 8) \Leftrightarrow x^2\equiv y^2\equiv 1(\text{mod } 8) \Leftrightarrow x^2-y^2 \,\vdots\, 8$

Vì $\left.\begin{array}{l} x^2\equiv 0,1,4(\text{mod } 5) \\ y^2\equiv 0,1,4(\text{mod } 5) \end{array}\right\}$ suy ra $\begin{array}{l} 3x^2\equiv 0,\ 3,\ 2(\text{mod } 5) \\ 2y^2\equiv 0,\ 2,\ 3(\text{mod } 5) \end{array}$ nên $3x^2-2y^2\equiv 0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4(\text{mod } 5).$

Do đó $3x^2-2y^2\equiv 1(\text{mod } 5) \Leftrightarrow x^2\equiv y^2\equiv 1(\text{mod } 5) \Leftrightarrow x^2-y^2 \,\vdots\, 5.$

Mà $(5,\ 8)=1$ nên ta có $x^2-y^2 \,\vdots\, 40.$

2) Đẳng thức đã cho tương đương với $(x^2+1)^2=(y+1)(y^2-y+1)$

Vì $y^2-y+1=(y+1)^2-3(y+1)+3.$ Suy ra nếu d là ước số chung lớn nhất của $y+1,\ y^2-y+1$ thì d là ước của 3. Suy ra d nhận một trong 2 giá trị $1,3$.

Mà $x^2\equiv 0,\ 1(\text{mod } 3)$ suy ra $x^2+1\equiv 1,\ 2(\text{mod } 3)$ nên $d\ne 3.$

Suy ra $d=1 \to y+1, y^2-y+1$ nguyên tố cùng nhau. Vì $(y+1)(y^2-y+1)$ là số chính phương. Suy ra $y+1,\ y^2-y+1$ là các số chính phương. Ta ký hiệu $y+1=a^2,\ y^2-y+1=b^2,\ a,\ b\in\mathbb{N}$

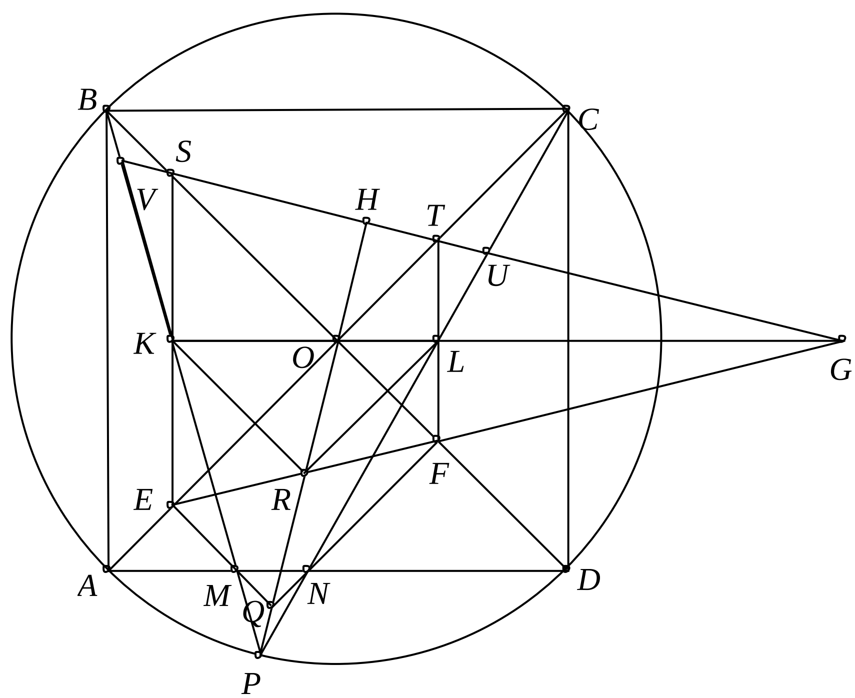
Do đó $4y^2-4y+4=4b^2 \Leftrightarrow (2b)^2-(2y-1)^2=3 \Leftrightarrow (2b-2y+1)(2b+2y-1)=3.$

Vì $2b-2y+1+2b+2y-1=4b\ge 0$ (vì ta chọn $b\ge 0$) suy ra

- $\begin{cases}2b+2y-1=3\\2b-2y+1=1\end{cases} \Rightarrow y=1 \to a^2=2$ (loại)
- $\begin{cases}2b+2y-1=1\\2b-2y+1=3\end{cases} \Rightarrow y=0,\ x=0.$

Đáp số $x=0,\ y=0.$

Câu III. (3 điểm)



1) **(1 điểm)** Vì ΔCND vuông tại D nên L là trung điểm của NC và O là trung điểm AC suy ra $OL \parallel AD$, tương tự $OK \parallel AD$ vậy $O,\ K,\ L$ thẳng hàng.

2) (**1 điểm**) Gọi Q là giao của EM và PO. Ta có tam giác EAM vuông cân tại E nên $EMA=45^\circ$. do đó $EMA=BDA=45^\circ$ suy ra $MQ \parallel BO$. Tương tự $NF \parallel CO$. Ta có $\dfrac{PM}{PB}=\dfrac{PQ}{PO}$.

Mặt khác $MN \parallel BC$ nên $\dfrac{PM}{PB}=\dfrac{PN}{PC}$ suy ra $\dfrac{PN}{PC}=\dfrac{PQ}{PO}$ hay $QN \parallel OC$. Vậy $Q,\ N,\ F$ thẳng hàng. Từ đó $OFQE$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF.

3) (**1 điểm**) Theo tính chất đối xứng thì $ST,\ EF,\ KL$ đồng quy tại G (trường hợp P là điểm chính giữ cung AD thì $ST,\ EF,\ KL$ song song nên dễ suy ra $U,\ V,\ K,\ L$ cùng thuộc một đường tròn). Gọi H là giao của PO và ST. Theo 2) thì $RO=RF$ và $LO=LF$ nên RL là phân giác của FRO mà GL là phân giác TGR. Từ đó L tâm nội tiếp của tam giác

GHR mà $RLG = 135^\circ$ suy ra $RHG = 90^\circ$ Vậy $UV \perp PO$. Ta có tam giác OPC cân tại O nên $OPC = OCP = ABP = VKS$. Mà $HPU + VUL = 90^\circ$, $SKO = 90^\circ$ nên $VUL + VKL = 180^\circ$ do đó $U,\ V,\ K,\ L$ cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV. (1 điểm)

Dãy $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_s$ chiều dài $s \geq 3$ tùy ý được gọi là dãy "tốt" nếu $a_j \neq \frac{a_i + a_k}{2}$ với mọi chỉ số $(i,\ j,\ k)$ thỏa mãn $(1 \leq i < j < k \leq s)$.

Nếu dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ là dãy tốt thì dãy $2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots, 2a_s$ và dãy $2a_1 - 1,\ 2a_2 - 1,\ 2a_3 - 1,\ \ldots,\ 2a_s - 1$ cũng là dãy tốt.

Từ nhận xét trên ta suy ra nếu dãy $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_s$ là dãy tốt của các số $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ s\ (s \geq 3)$ thì dãy $2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3,\ \ldots,\ 2x_s,\ 2x_1 - 1,\ 2x_2 - 1, \ldots,\ 2x_s - 1$ là dãy tốt của các số $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2s$ (chú ý rằng $\frac{2x_k + 2x_m - 1}{2}$ không là số nguyên).

- $(1,\ 3,\ 2)$ là dãy tốt của các số $1,\ 2,\ 3$.
- Với $n \geq 3$ luôn tồn tại k để $3 \cdot 2^{k-1} < n \leq 3 \cdot 2^k$. Theo nhận xét trên, ta xây dựng được dãy tốt từ các số $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 3.2^k$ sau đó ta bỏ đi các số $n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots,\ 3 \cdot 2^k$ chúng ta nhận được dãy tốt từ các số $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ (trên dãy tốt ta bỏ đi các số hạng bất kỳ thì dãy còn lại vẫn là dãy tốt).