ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN NĂM 2015
CỦA TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. (3 điểm)

1) Với a,b,c là các số thực thỏa mãn

$$\left(3a+3b+3c\right)^3=24+\left(3a+b-c\right)^3+\left(3b+c-a\right)^3+\left(3c+a-b\right)^3.$$

Chứng minh rằng

$$\left(a+2b\right)\left(b+2c\right)\left(c+2a\right)=1.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+2y+xy=5\\27\left(x+y\right)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x.\end{cases}$$

Câu II. (3 điểm)

1) Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ đều là số chính phương (số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên).

2) Tìm $x,\ y$ nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

3) Giả sử $x,\ y,z$ là những số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân với $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN=2MH$.

1) Chứng minh rằng $BN=AC$.

2) Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B,D,N,C cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là $\left(O\right)$.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt $\left(O\right)$ tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Câu IV. (1 điểm)

Ký hiệu S là tập hợp gồm 2015 điểm phân biệt trên mặt phẳng. Giả sử tất cả các điểm của S không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất 2015 đường thẳng phân biệt mà mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm của S.

HẾT

ĐÁP ÁN

Câu I. (3 điểm)

1) Đặt $x=3a+b-c, y=3b+c-a, z=3c+a-b$ ta thu được

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=24 \Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x)=24$$
$$\Leftrightarrow 24(a+2b)(b+2c)(c+2a)=24 \Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a)=1.$$

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=9\ (1)\\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x\ (2)\end{cases}$$

Từ (2) suy ra

$$x^3+y^3+8+3(x+2)(y+2)(x+y)=27x^3+27x^2+9x+1$$
$$\Leftrightarrow (x+y+2)^3=(3x+1)^3 \Leftrightarrow x+y+2=3x+1 \Leftrightarrow 2x-y=1.$$

Thế vào phương trình (1) ta thu được

$$(x+2)(2x+1)=9 \Leftrightarrow 2x^2+5x-7=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=1\\ x=-\frac{7}{2}, y=-8.\end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $\left(-\frac{7}{2};-8\right)$.

Câu II. (3 điểm)

1) Giải sử $n+5=a^2, n+30=b^2\ (a,b\in\mathbb{N}, a<b)$, suy ra $b^2-a^2=25 \Leftrightarrow (b+a)(b-a)=25$ mà $a,b\in\mathbb{N}, a<b \Rightarrow 0<b-a<b+a.$ Do đó $\begin{cases}b+a=25\\ b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=12\\ b=13\end{cases} \Rightarrow n=139$ (thỏa mãn).

2) Điều kiện $x,y\ge 0$. Từ giả thiết ta có

$x+y+4+2\sqrt{x+y+3}=x+y+2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Rightarrow x+y+3=xy+4-4\sqrt{xy}.$

Do đó $\sqrt{xy}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{xy}=\frac{p}{q}$ với $p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}_+$ và $(p,q)=1$. Suy ra $p^2=q^2xy \Rightarrow q=1.$

$\Rightarrow \sqrt{xy}=p \Rightarrow \sqrt{x+y-3}=p-2.$

Thay vào phương trình đầu tiên ta được $\sqrt{x}+\sqrt{y}=p-1 \Rightarrow \sqrt{x}=(p-1)-\sqrt{y}$

$\Rightarrow x=(p-1)^2+y-2(p-1)\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{y}=u\in\mathbb{N}.$

Tương tự ta có $\sqrt{x}=v\in\mathbb{N} \Rightarrow x+y=u^2+v^2$. Thay vào phương trình đầu ta nhận được

$\sqrt{u^2+v^2+3}=u+v-1 \Rightarrow u^2+v^2+3=u^2+v^2+1+2uv-2u-2v \Rightarrow uv-u-v-1=0$

$\Leftrightarrow (u-1)(v-1)=2 \Rightarrow \begin{cases}u-1=1\\ v-1=2\end{cases} \vee \begin{cases}u-1=2\\ v-1=1.\end{cases}$

- Giải $\begin{cases}u-1=1\\ v-1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y}=2\\ \sqrt{x}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=4\\ x=9\end{cases}$ (thỏa mãn).

- Giải $\begin{cases} u-1=2 \\ v-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ x=4. \end{cases}$ (thỏa mãn).

3) Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2\sqrt{(y+z-4)}=\sqrt{4(y+z-4)}\le \frac{y+z-4+4}{2}=\frac{y+z}{2}\Rightarrow \sqrt{y+z-4}\le \frac{y+z}{4}.$$

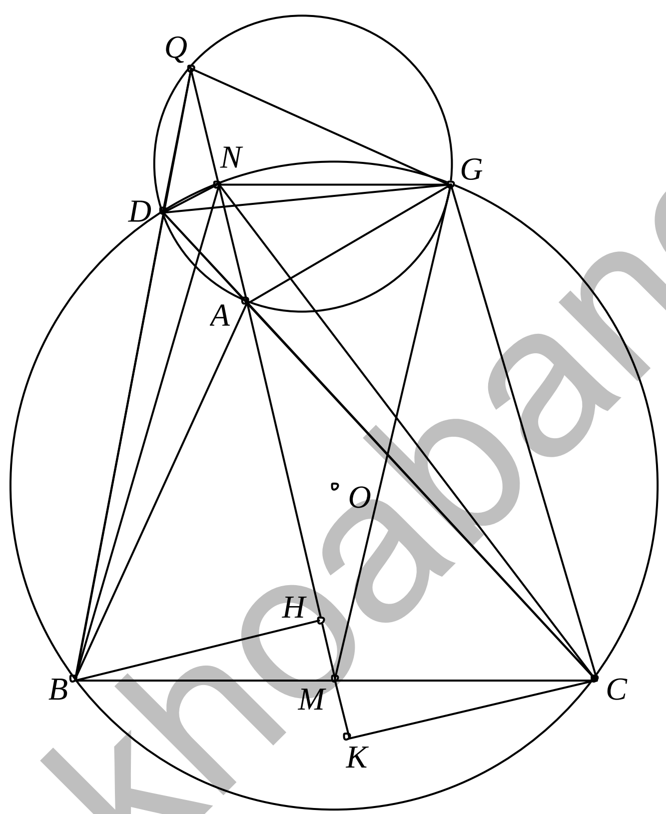
Tương tự $\sqrt{z+x-4}\le \frac{z+x}{4};\sqrt{x+y-4}\le \frac{x+y}{4}.$ Do đó

$$P\ge \frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}=4\left(\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{zy+xy}+\frac{z^2}{xz+yz}\right)\ge 4\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)}.$$

Mà $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz)\Rightarrow P\ge 4.\frac{3}{2}=6.$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=4.$

Vậy $P_{\min}=6.$

Câu III. (3 điểm)



1) (**1.5 điểm**) Gọi K là hình chiếu của C lên AM. Ta thấy $BH=CK$ và $HM=MK$. Từ đó $AN=2HM=HK$ nên $HN=AK$. Vậy $\Delta BHN=\Delta CKA$ (c-g-c) suy ra $BN=AC$.

2) (**1 điểm**) Từ $\Delta BHN=\Delta CKA$ suy ra $BNH=CAK$ hay $BNQ=CAN$ lại có $AN=QN$ và $BN=CN$. Suy ra $\Delta BNQ=\Delta CNA$ (c-g-c) suy ra $QBN=NCA$ hay $DBN=NCD$ vậy tứ giác $BDNC$ nội tiếp.

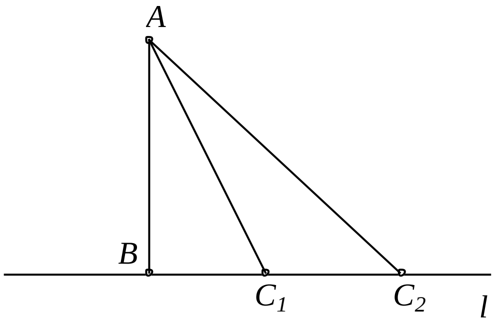
3) (**0.5 điểm**) Ta có $GQA=GDA=GBC$ và $GAQ=GDQ=GCB$ suy ra $\Delta GQA\sim\Delta GBC$ và có trung tuyến tương ứng là GN và GM nên $\Delta GQN\sim\Delta GBM$ và $\Delta GNA\sim\Delta GMC.$ Từ đó suy ra $\Delta GNM\sim\Delta GAC$ suy ra $GNQ=180^\circ-GNA=180^\circ-GAC=GAD,$ kết hợp $GQN=GDA$ suy ra $\Delta GQN\sim\Delta GDA.$ Từ đó, ta có

$\frac{DA}{NA}=\frac{DA}{QN}=\frac{DG}{QG}$ kết hợp $DAN=DGQ$ suy ra $\Delta DNA\sim\Delta DQG$ nên suy ra

$GNC=GDC=QDN=NCB.$ Từ đó $NG \parallel BC.$

Câu IV. (1 điểm)

Ta chứng minh bài toán đúng với tập *S* có *n* điểm $(n \geq 3)$. Trước hết ta chứng minh có tồn tại đường thẳng đi qua đúng 2 điểm của *S*. Giả sử L là tập hợp các đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm của *S*. Vì *S,L* là các tập hợp hữu hạn suy ra ta có điểm $A \in S$ và đường thẳng $l \in L$ sao cho khoảng cách từ *A* đến *l* là nhỏ nhất $(A \notin l)$. Gọi *B* là chân đường cao hạ từ *A* đến đường thẳng *l*, điểm *B* chia đường thẳng *l* thành 2 nửa đường thẳng và ta chứng minh ở mỗi phía của *B* chỉ tồn tại nhiều nhất một điểm của *S*. Giả sử phản chứng có một nửa đường thẳng có chứa 2 điểm của *S* $(C_1 \neq C_2)$.



Ta có $0 \leq |BC_1| < |BC_2|$ và ΔAC_1C_2 là tù hoặc vuông (khi $C_1 \equiv B$) suy ra AC_1C_2 là lớn nhất. Ta có $|C_1C_2| < |AC_2|$ khi đó khoảng cách từ C_1 đến AC_2 nhỏ hơn khoảng cách $|AB|$(mâu thuẫn vì ta giả thiết khoảng cách từ A đến *l* là nhỏ nhất). Từ kết quả trên suy ra l đi qua nhiều nhất 2 điểm của $S \Rightarrow l$ đi qua đúng 2 điểm của *S*.

Ta chứng minh tiếp bài toán bằng quy nạp theo $n \geq 3$

- $n = 3$ hiển nhiên
- Giả sử kết luận đúng với $n-1$ ta chứng minh kết luận của bài toán đúng với *n*.

Áp dụng kết quả trên với tập *S* ta có tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm, gọi hai điểm đó là A, B. Ta xét tập $S' = S \setminus \{A\}$ khi đó có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Tất cả các điểm của S' (S' gồm $n-1$ điểm) cùng nằm trên một đường thẳng l. Ta nhận được tập n đường thẳng phân biệt $\{AX : X \in S'\} \cup \{l\}$.

Trường hợp 2: Tất cả các điểm của S' không thuộc cùng một đường thẳng. Khi đó theo giả thiết quy nạp có ít nhất $n-1$ đường thẳng nối các điểm của S'. Vì đường thẳng $l = AB$ phân biệt với $n-1$ đường thẳng trên $(l \cap S' = \{B\})$. Với $n = 2015$, ta được điều phải chứng minh.