ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2011

MÔN: TOÁN (Vòng 2)

Câu I. 1) Điều kiện $0 \le x \le 1$, phương trình tương đương với $\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}(\sqrt{1-x}+1)=1$

$\Leftrightarrow 3(\sqrt{1-x}+1)=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$

Nếu $0 \le x < 1 \Rightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right) > 3$ đồng thời $\sqrt{x}+\sqrt{x+3} < \sqrt{1}+\sqrt{4}=3$

Suy ra VT $>$ VP. (loại).

Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm.

2) $x=y=0$ là nghiệm. Xét $x \ne 0, y \ne 0$ hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \ (1) \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{2}{xy}\right)=8 \ (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta thu được $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^3=8 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Câu II.

1) Ký hiệu $K=\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]$, do $n>1 \Rightarrow K \ge 1$. Ta có $K \le \sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3} < K+1$

$\Leftrightarrow (K-\dfrac{1}{3})^3 \le n-\dfrac{1}{27} < (K+\dfrac{2}{3})^3 \Leftrightarrow K^3-K^2+\dfrac{K}{3}-\dfrac{1}{27} \le n-\dfrac{1}{27} \le K^3+2K^2+\dfrac{4}{3}K+\dfrac{8}{27}$

$\Leftrightarrow K^3+\dfrac{K}{3} \le n+K^2 < K^3+3K^2+\dfrac{4}{3}K+\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow K^3 < n+K^2 < (K+1)^3$

Suy ra $n+K^2=n+\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Trung tâm Khoa Bảng

2) Ta có

$$\sqrt{6\left(x^2+5\right)}+\sqrt{6\left(y^2+5\right)}+\sqrt{z^2+5}=\sqrt{6\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\sqrt{6\left(y+z\right)\left(y+x\right)}+\sqrt{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}$$

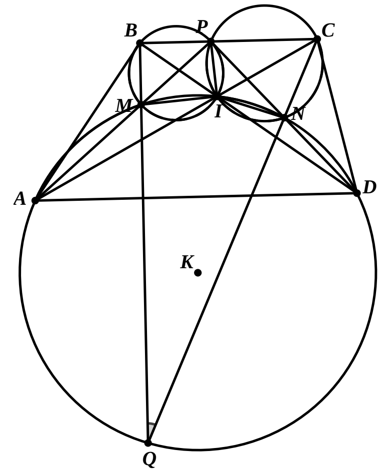
$$\le \frac{3\left(x+y\right)+2\left(x+z\right)}{2}+\frac{3\left(x+y\right)+2\left(y+z\right)}{2}+\frac{\left(z+x\right)+\left(z+y\right)}{2}\le \frac{9x+9y+6z}{2}=\frac{3}{2}\left(3x+3y+2z\right)$$

Suy ra $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}\ge \dfrac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1, z=2.$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{2}{3}.$

Câu III.

1) Tứ giác $BPIM$ nội tiếp và $AD \parallel BC \Rightarrow MAD=BPM=BIM \Rightarrow$ tứ giác $AMID$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $DNIA$ nội tiếp. Vậy năm điểm A, M, I, N, D thuộc một đường tròn $\left(K\right)$



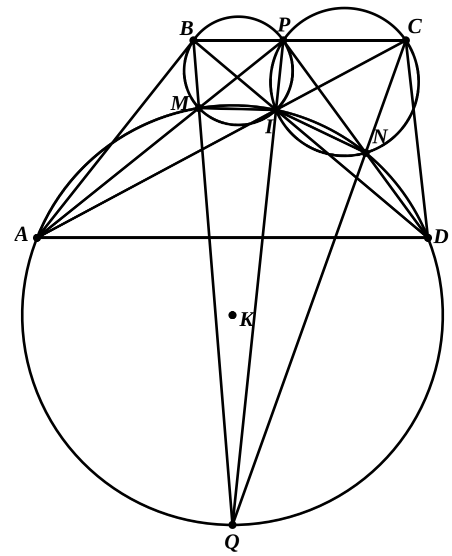
2) Do các tứ giác $BPIM$ và $CPIN$ nội tiếp nên ta có $QMI=BPI=CNI$

$\Rightarrow$ tứ giác $MINQ$ nội tiếp.

Mà $M, I, N \in \left(K\right) \Rightarrow$ Tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn $\left(K\right)$.

Vậy Q thuộc đường tròn $\left(K\right)$ (đpcm)

3) Khi P, I, Q thẳng hàng, kết hợp với Q thuộc đường tròn $\left(K\right)$ ta có



$AIQ=PIC$ (đối đỉnh)

$PIC=PNC$ (do tứ giác $NIPC$ nội tiếp)

$PNC=QND$ (đối đỉnh)

$QND=QID$ (do tứ giác $INDQ$ nội tiếp)

$\Rightarrow AIQ=QID$

$\Rightarrow IQ$ là phân giác DIA nên IP là phân giác góc BIC.

Do đó $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{IB+ID}{IC+IA}=\dfrac{BD}{AC}\Rightarrow \dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{CA}$ (đpcm)

Trung tâm Khoa Bảng

Câu IV. Giả sử A có n số, chúng ta xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = 100.$ (1)

Suy ra với mỗi $k \in \{1,2,3,\ldots,n-1\}$ ta có $x_{k+1} = x_i + x_j \le x_k + x_k = 2x_k$ (2) với $1 \le i, j \le k.$

Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \le 1+1 = 2, x_3 \le 2+2 = 4, x_4 \le 8, x_5 \le 16,$

$x_6 \le 32, x_7 \le 64.$ Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.

+) Giả sử $n = 8 \Rightarrow x_8 = 100$.

Vì $x_6 + x_7 \le 32 + 64 = 96 \Rightarrow x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50.$

Vì $x_5 + x_6 \le 16 + 32 = 48 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25.$

Vì $x_4 + x_5 \le 8 + 16 = 24 < 25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \dfrac{25}{2}$ (mâu thuẫn).

+) $n = 9$ ta có tập $\{1,2,3,5,10,20,25,50,100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Đáp số: $n = 9$

Trung tâm Khoa Bảng