ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (VÒNG 1)
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2010

Câu I :

1) Cộng hai phương trình của hệ ta thu được

$$(2x+3y)^2 = 25 \leftrightarrow 2x+3y=\pm 5$$

- Với $2x+3y=5$ ta được hệ $\begin{cases} 2x+3y=5 & (1) \\ x^2+y^2=2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x=\dfrac{5-3y}{2}$ và thay vào (2) ta được $\left(\dfrac{5-3y}{2}\right)^2+y^2=2$

$$\leftrightarrow (5-3y)^2+4y^2=8 \leftrightarrow 13y^2-30y+17=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \to x=1 \\ y=\dfrac{17}{13} \to x=\dfrac{7}{13} \end{array}\right.$$

- Tương tự với trường hợp $2x+3y=-5$ ta được $\left[\begin{array}{l} y=-1 \to x=-1 \\ y=-\dfrac{17}{13} \to x=-\dfrac{7}{13} \end{array}\right.$

Đáp số: $(x=1, y=1)$, $(x=\dfrac{7}{13}, y=\dfrac{17}{13})$

$(x=-1, y=-1)$, $(x=-\dfrac{7}{13}, y=-\dfrac{17}{13})$

Chú ý: Học sinh có thể giải theo cách cơ bản khác như sau: Dễ thấy $y\neq 0$ và đặt $x=ky$ ta thu được $\begin{cases} 3k^2y^2+12ky^2+8y^2=23 \\ k^2y^2+y^2=2 \end{cases}$ suy ra $2(3k^2+12k+8)=23(k^2+1) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=\dfrac{7}{17} \end{array}\right.$

◦ Với $k=1 \to y^2=1 \to \left[\begin{array}{l} y=1 \to x=1 \\ y=-1 \to x=-1 \end{array}\right.$

◦ Với $k=\dfrac{7}{17} \to y^2=\dfrac{17^2}{13^2} \to \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{17}{13} \to x=\dfrac{7}{13} \\ y=-\dfrac{17}{13} \to x=-\dfrac{7}{13} \end{array}\right.$

2) Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}$, phương trình tương đương với

$$\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-1\right)=0$$

◦ Giải $\sqrt{2x+1}=3 \leftrightarrow 2x+1=9 \leftrightarrow x=4$

◦ Giải $\sqrt{4x^2-2x+1}=1 \leftrightarrow 4x^2-2x=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Đáp số: $x=4,\ \ x=0,\ \ x=\frac{1}{2}$

Câu II :

1) Đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$x^2+y^2+x^2y^2+1+4xy+2(x+y)(1+xy)=25$$
$$\leftrightarrow (x+y)^2+(xy+1)^2+2(x+y)(1+xy)=25$$
$$\leftrightarrow \left[(x+y)+(xy+1)\right]^2=25$$
$$\leftrightarrow \left[(x+1)(y+1)\right]^2=25$$
$$\leftrightarrow (x+1)(y+1)=5 \text{ (Vì } x,y\ge 0\text{)}$$
$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=5\\ y+1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1=1\\ y+1=5\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x=4,y=0)\\ (x=0,y=4)\end{array}\right.$$

Đáp số: $(x=0,y=4),\ (x=4,y=0)$

2) Ta có $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Với $k=1$ ta có $\frac{3}{1.2}=1+1-\frac{1}{2}$

$k=2$ ta có $\frac{7}{2.3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

……………

$k=n$ ta có $\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Cộng n đẳng thức ta thu được

$\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\cdots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=n+1-\frac{1}{n+1}$ Dễ thấy $n<n+1-\frac{1}{n+1}<n+1$

Suy ra $\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\cdots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n$

Chú ý: Học sinh có thể giải cách khác như sau $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{k}{k+1}$

Với $k=1\rightarrow \frac{3}{1.2}=1+\frac{1}{2}$

$k=2\rightarrow \frac{7}{2.3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

……………

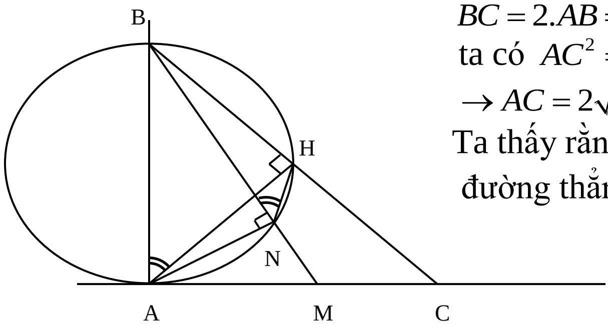
$k=n\rightarrow \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}$

Cộng n đẳng thức ta suy ra $\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\frac{13}{3.4}+\cdots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=n+\frac{n}{n+1}$

Suy ra $\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\cdots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n$

Câu III :

1) Xét tam giác BAC vuông tại A có góc $\widehat{ACB}=30^0$, $AB=2R.$ Ta suy ra



$BC=2.AB=4R.$ Theo định lý Pitago đối với tam giác ABC ta có $AC^2=BC^2-AB^2=16R^2-4R^2=12R^2$

$\rightarrow AC=2\sqrt{3}R.$

Ta thấy rằng $AH\perp BH,$ nên AH là khoảng cách từ A đến đường thẳng BC.

Dễ thấy $AB.AC=AH.BC=2S_{\Delta ABC}$

$$\Rightarrow AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{2R.2\sqrt{3}.R}{4R}=\sqrt{3}R$$

Đáp số: $AC=2\sqrt{3}R,\ BC=4R,\ AH=\sqrt{3}R.$

2) Vì $ABHN$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HNB}=\widehat{HAB}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{BH}$)

Ta có $\widehat{HAB}$ = $\widehat{ACB}$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra $\widehat{HNB}=\widehat{ACB}\rightarrow 180^0=\widehat{HNB}+\widehat{HNM}=\widehat{ACB}+\widehat{HNM}$

$\rightarrow$ tứ giác $HNMC$ là tứ giác nội tiếp, như vậy bốn điểm C,H,N,M cùng nằm trên một đường tròn. Vì A,B,C cố định $\rightarrow$ H cố định. Vì tâm đường tròn cách đều H,C cố định nên nó nằm trên đường trung trực của đoạn HC cố định. Vậy tâm đường tròn đi qua đường trung trực của đoạn HC.

Câu IV : Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\geq\sqrt{4+\left(a^2+b^2\right)^2}\quad\forall a,b\in\mathbb{R}\quad(1)$$

Bình phương hai vế ta thu được $2\sqrt{(1+a^4)(1+b^4)}\geq 2+2a^2b^2$

$\leftrightarrow(1+a^4)(1+b^4)\geq(1+a^2b^2)^2$

$\leftrightarrow(a^2-b^2)^2\geq 0$ (Hiển nhiên đúng)

◦ Ta có $(1+a)(1+b)=\frac{9}{4}\leftrightarrow a+b+ab=\frac{5}{4}$

Ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2(a^2 + \frac{1}{4}) \geq 2a$$

$$2(b^2 + \frac{1}{4}) \geq 2b$$

Cộng ba bất đẳng thức ta thu được

$$3(a^2 + b^2) + 1 \geq 2(a + b + ab) = \frac{5}{2}$$

$$\leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt{1 + a^4} + \sqrt{1 + b^4} \geq \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.