# ĐÁP ÁN MÔN TOÁN ( VÒNG 2 )
# KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2010

**Câu I :**

1) Tập xác định: $x \ge -\frac{1}{3}$. Hai vế của phương trình không âm, bình phương hai vế ta được

$$x+3+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+3x+1=16$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2+10x+3}=12-4x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3}=6-2x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x \ge 0 \\ 3x^2+10x+3=(6-2x)^2=36-24x+4x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2-34x+33=0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow x=1$ (Thoả mãn điều kiện)

Đáp số: $x=1$.

Chú ý: Học sinh có thể làm nhanh hơn bằng phương pháp so sánh.

+ Nếu $-\frac{1}{3} \le x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} < \sqrt{1+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} < \sqrt{3+1} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1} < 4 \Rightarrow$ vô nghiệm

+ Nếu $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1} > \sqrt{1+3}+\sqrt{3+1} = 4 \Rightarrow$ vô nghiệm

+ Nếu $x = 1 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1} = \sqrt{1+3}+\sqrt{3+1} = 4$ (thoả mãn).

2) Cách 1. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy=26 & (1) \\ 3x+2x^2-xy-y^2=11 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình (2) với 2 rồi cộng theo vế với phương trình (1) ta được $9x^2+6x-48=0$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ hoặc } y=-3 \\ x=-\frac{8}{3} \Rightarrow y^2-\frac{8}{3}y+\frac{43}{9}=0 : \Delta<0 \Rightarrow \text{ vô nghiệm} \end{array} \right.$$

Đáp số: $(x=2, y=1)$ hoặc $(x=2, y=-3)$.

Cách 2. Ta có $(2x+y)^2+(x-y)^2=5x^2+2y^2+2xy$
$(2x+y)+(x-y)=3x$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (2x+y)^2+(x-y)^2=26 \\ (2x+y)+(x-y)+(2x+y)(x-y)=11 \end{cases}$

Đặt $u=2x+y, v=x-y$ ta thu được $\begin{cases} u^2+v^2=26 \\ u+v+uv=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=26 \\ 2(u+v)+2uv=22 \end{cases}$

Cộng hai phương trình ta thu được

$$(u+v)^2+2(u+v)-48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=6 \\ u+v=-8 \end{array}\right.$$

◦ Giải $\begin{cases} u+v=6 \\ uv=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=5, v=1 \\ u=1, v=5. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=-3 \\ \begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=1. \end{array}\right.$$

◦ Giải $\begin{cases} u+v=-8 \\ uv=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=-8-u \\ u^2+8u+19=0 \end{cases}$ vô nghiệm

**Câu II :**

1) Suy ra tồn tại số nguyên dương $m$ ($m>n$) thoả mãn

$m^2=n^2+391 \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=17.23=1.391$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+n=391 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow 2n=390 \Rightarrow n=195 \\ \begin{cases} m+n=23 \\ m-n=17 \end{cases} \Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3. \end{array}\right.$

Đáp số: $n=3, n=195.$

2) Ta có $(z+\sqrt{xy})^2 \le (z+x)(z+y)=z^2+zx+zy+xy=z(x+y+z)+xy=z+xy.$

Suy ra $\sqrt{z+xy} \ge z+\sqrt{xy}$ (1)

Ta có $2x^2+2y^2 \ge (x+y)^2 \to \sqrt{2x^2+2y^2} \ge x+y.$ (2)

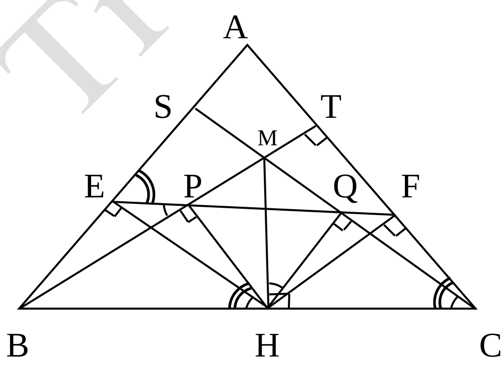
Cộng hai bất đẳng thức (1) và (2) ta thu được

$\sqrt{z+xy}+\sqrt{2x^2+2y^2} \ge x+y+z+\sqrt{xy}=1+\sqrt{xy}$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{z+xy}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \ge 1.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=a \\ z=1-2a \end{cases}$ $(a \in (0, \frac{1}{2})).$

**Câu III :**




1) Vì $\Delta ABC$ nhọn nên các điểm $E, F$ nằm trên các cạnh $AB, AC$ và $P, Q$ nằm trong $\Delta ABC$.

Ta có $\widehat{EPB}=\widehat{TPF}$ (đối đỉnh) (1)

$\widehat{EPB}=\widehat{BHE}$ (cùng chắn cung BE) (2)

$\widehat{TPF}=\widehat{MHQ}$ (cùng chắn cung MQ) (3)

$\widehat{MHQ}=\widehat{HCQ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) (4).

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{BHE}=\widehat{HCQ} \Rightarrow EH // SC$

Vì $EH \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$ (5).

Tương tự ta thu được $BT \perp AC$ (6). Từ (5), (6) $\Rightarrow$ $M$ là trực tâm (ĐPCM).

2) Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{BHP}$ (cùng bù với góc $\widehat{BEP}$) (7)

Ta có $\begin{cases} HP \perp BP \\ CT \perp BT \end{cases} \Rightarrow HP // CT \Rightarrow \widehat{BHP} = \widehat{BCT}$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\left.\begin{matrix} \widehat{AEF} = \widehat{BCT} \\ \widehat{AEF} + \widehat{BEF} = 180^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{BCF} + \widehat{BEF} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

**Câu IV :** Nếu tất cả các số được đánh dấu đều dương $\rightarrow$ đpcm.

Xét trường hợp tồn tại $i$ để $a_i$ được đánh dấu và $a_i < 0$, chọn $i$ là chỉ số nhỏ nhất như vậy. Khi đó theo giả thiết tồn tại $k$ để $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+k} > 0$.

Giả sử $k$ là số nhỏ nhất để $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+k} > 0$ (1) (hiển nhiên $k \geq 1$). Như vậy

$a_i < 0$

$a_i + a_{i+1} \leq 0$

………

$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+k-1} \leq 0$

Ta có $a_i + (a_{i+1} + \cdots + a_{i+k}) > 0 \Rightarrow a_{i+1} + \cdots + a_{i+k} > 0 \Rightarrow a_{i+1}$ được đánh dấu.

$(a_i + a_{i+1}) + (a_{i+2} + \cdots + a_{i+k}) > 0 \Rightarrow a_{i+2} + \cdots + a_{i+k} > 0 \Rightarrow a_{i+2}$ được đánh dấu.

………

Cuối cùng $(a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+k-1}) + a_{i+k} > 0 \Rightarrow a_{i+k} > 0 \Rightarrow a_{i+k}$ cũng được đánh dấu.

$\Rightarrow$ tất cả các số $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{i+k}$ đều được đánh dấu. Như vậy, trong các số $a_1, a_2, \cdots, a_{i+k}$ các số được đánh dấu có tổng lớn hơn 0.

Tiếp tục quá trình lập luận trên cho các số còn lại $a_{i+k+1}, \ldots, a_{2010}$. Sau một số hữu hạn bước ta được điều phải chứng minh.