ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (VÒNG 1)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2008

Câu I : (3 điểm)

1) (1,5 điểm) Hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases}(x-1)^2+y^2 = 1\\(x-1)^3+y^3 = 1.\end{cases}$ đặt u = x -1 ta được hệ

$\begin{cases}u^2+y^2 = 1(1)\\u^3+y^3 = 1\ (2).\end{cases}$ từ (1) => $|u|\le 1$ *và* $|y|\le 1$ (3)

Trừ (1) cho (2) ta được: $u^2(1-u)+y^2(1-y)=0$

Từ điều kiện (3) => $u^2(1-u)+y^2(1-y)\ge 0$

Để có dấu đẳng thức ta phải có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0\\y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}u=1\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

2) (1,5 điểm) Điều kiện $x\ge -\frac{7}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(2x+7)-(2x+7)\sqrt{2x+7}+x(x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+7}-x)(\sqrt{2x+7}-x-7)=0$$

a) $\sqrt{2x+7}=x \Rightarrow x=1+2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2x+7}=x+7$ Phương trình này vô nghiệm

Đáp số: $x=1+2\sqrt{2}$

Câu II : (3 điểm)

1) (2 điểm) Ta có $\overline{abc}-\overline{bda}=650$

$\Rightarrow 100(a-b)+10(b-d)+c-a=650$

$\Rightarrow c-a=0 \Rightarrow a=c$

$\Rightarrow 10(a-b)+(b-d)=65$

$\Rightarrow b-d=\pm 5$

a) $\begin{cases}b-d=5\\a-b=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=b-5\ge 0 \Rightarrow b\ge 5\\a=b+6\le 9 \Rightarrow b\le 3\end{cases}$

Trường hợp này không tồn tại số cần tìm

b) $\begin{cases}b-d=-5\\a-b=7\end{cases}$

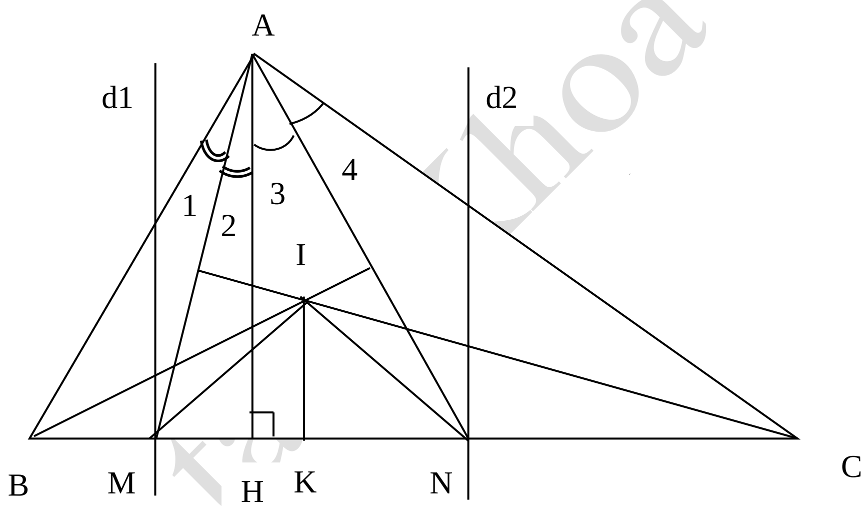
ta có: $3\,|\,a+b+c+d=(b+7)+b+(b+7)+(b+5)=4b+19$

suy ra $3 | 3b+18+b+1 \Rightarrow 3 | b+1$
từ $a=b+7\le 9 \Rightarrow b\le 2$ Vậy chỉ có b=2
=>số cần tìm là 9297
2) (1 điểm) Giả sử phương trình có các nghiệm nguyên là x_1, x_2. Khi đó:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p+1}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{p+2008}{2} \end{cases}$$

Do x_1, x_2 nguyên => $\dfrac{p+1}{2}$ và $\dfrac{p+2008}{2}$ là các số nguyên.
Điều này không thể xảy ra. Vậy không tồn tại p

Câu III : (3 điểm)
1) (1,5 điểm)



Ta có $\begin{matrix} CMA + A_2 = 90^0 \\ CAM + A_1 = 90^0 \end{matrix}$

Do $A_1 = A_2 \Rightarrow CMA = CAM \Rightarrow$ ΔCAM cân tại C.
Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được ΔBAN cân tại B
Giả sử phân giác của các góc B và C của ΔABC cắt nhau tại I => I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Do ΔCAM và ΔBAN cân => các đường phân giác của B và C chính là trung trực của AN và AM => I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN

2) (1,5 điểm) Từ giả thiết suy ra $MAN = 45^0 \Rightarrow MIN = 90^0$ (góc ở tâm) => ΔMIN vuông cân $\Rightarrow IK = KM = KN$ (IK là đường cao của ΔIMN) => đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với d_1 và d_2 (chú ý IK là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

Câu IV : (1 điểm)

Ta chứng minh rằng một trong hai số a và b phải có ít nhất một số nhỏ hơn hoặc bằng 2.

Thật vậy, giả sử ngược lại $a \ge 3$ và $b \ge 3$. Không mất tổng quát có thể giả sử $3 \le a \le b$.

Ta có : $\dfrac{ab+1}{a+b} \ge \dfrac{3b+1}{a+b} \ge \dfrac{3b+1}{2b} > \dfrac{3b}{2b} = \dfrac{3}{2}$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Giả sử $a \le 2 \Rightarrow a \in \{1,2\}$

- Xét $a = 1$. Khí đó $P = \dfrac{b^3+1}{b^3+1} = 1$
- Xét $a = 2$. Khi đó $P = \dfrac{8b^3+1}{b^3+8}$

Từ điều kiện $\dfrac{ab+1}{a+b} = \dfrac{2b+1}{b+2} < \dfrac{3}{2} \Rightarrow b < 4$

Vậy $b \in \{1,2,3\}$

Với $b = 1$ ta có $P = \dfrac{9}{9} = 1$

Với $b = 2$ ta có $P = \dfrac{8.8+1}{8+8} = \dfrac{65}{16}$

Với $b = 3$ ta có $P = \dfrac{8.27+1}{27+8} = \dfrac{217}{35}$

Từ các kết quả trên $\Rightarrow P_{max} = \dfrac{217}{35}$

Đạt được khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$