ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (VÒNG 2)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2008

Câu I: (3 điểm)

1) (2 điểm) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} -6xy(2x-y) = -6 \\ (2x)^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ ta thu được

$(2x-y)^3 = 1 \Rightarrow 2x - y = 1$

Từ phương trình thứ nhất của hệ => $xy = 1$

Từ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

2) (1 điểm)

Cách thứ nhất:

$$y = x + 2\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)} \le x + \frac{1}{2} + (1-x) = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng đạt được khi $x = \dfrac{1}{2}$

Cách thứ hai:

Đặt $\sqrt{1-x} = t \Rightarrow 0 \le t \le 1$ và $x = 1 - t^2$

$$\Rightarrow y = -t^2 + \sqrt{2}t + 1 = -(t - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}$$

Dấu bằng đạt được khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

=> $y_{max} = \dfrac{3}{2}$

Câu II: (3 điểm)

1) (2 điểm) Phương trình đã cho tương đương với

$(2x + y + 1)(x + y + 1) = -1$

a) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + 1 = -1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

2) (1 điểm) : Ta phải có

$abc \mid (ab-1)(bc-1)(ca-1)$

$\Leftrightarrow abc \mid -1 + ab + bc + ca - abc(a+b+c) + (abc)^2$

$\Leftrightarrow abc \mid ab + bc + ca - 1$

Không mất tổng quát có thể giả sử $1 \le a \le b \le c$

Ta có $abc \le ab + bc + ca - 1 < ab + bc + ca < c(2a + b)$

=> $ab < 2a + b \le 3b \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$

❖ Xét trường hợp $a = 1$ ta có:

$bc \mid bc + b + c - 1 \Rightarrow bc \mid b + c - 1$

$\Rightarrow bc \le b + c - 1 \Rightarrow (b-1)(c-1) \le 0$

$\Rightarrow (b-1)(c-1) = 0$

Với *a = 1, b=1 ta có :* $\dfrac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} = 0 \quad \forall c$

Vậy trong trường hợp này ta thu được nghiệm : a=1, b=1, c nguyên dương tùy ý.
Do vai trò của *a, b, c* như nhau trong ba số *a, b, c* có hai số bằng 1 và một số nguyên dương tùy ý là đáp số của bài toán.

❖ Xét trường hợp $a = 2$

$2bc \mid 2(b+c) + bc - 1 \Rightarrow 2bc \mid 4(b+c) + 2bc - 2$

$\Rightarrow 2bc \mid 4(b+c) - 2 \Rightarrow bc \mid 2(b+c) - 1$

$\Rightarrow bc \le 2(b+c) - 1 \Rightarrow (b-2)(c-2) \le 3$

$\Rightarrow (b-2)(c-2) \in \{0, 1, 2, 3\}$

a) Nếu $(b-2)(c-2) = 0 \Rightarrow$ nếu $c = 2 \rightarrow b = 2$

Lúc đó $P = \dfrac{3(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} = \dfrac{3.3.3}{2.2.2} = \dfrac{27}{8}$ (loại)

Nếu $b = 2 \Rightarrow P = \dfrac{3(2c-1)^2}{4c}$ không là số nguyên => loại

b) Nếu $(b-2)(c-2) = 1 \Rightarrow b = 3, c = 3$

$P = \dfrac{25.8}{2.3.3} = \dfrac{100}{9}$ (loại)

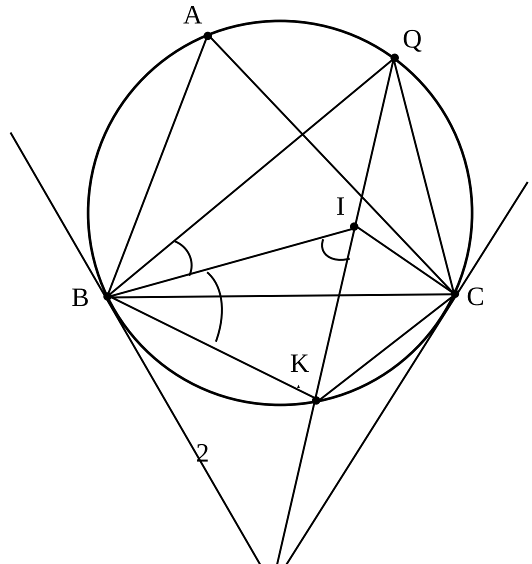
c) Nếu $(b-2)(c-2) = 2 \Rightarrow b = 3, c = 4$ Lúc đó $P = \dfrac{5.11.7}{2.3.4}$ (loại)

d) Nếu $(b-2)(c-2) = 3 \Rightarrow b = 3, c = 5$ Lúc đó $P = \dfrac{5.14.9}{2.3.5} = 21$ (thỏa mãn)

Vậy ta được đáp số $a = 2, b = 3, c = 5$
Do vai trò của *a, b, c* như nhau nên trong trường hợp này các nghiệm của bài toán là các hoán vị của (2,3,5).

Câu III: (3 điểm)

1) (1,5 điểm)



Giả sử phân giác của góc KBQ cắt PQ tại *I*. P

Nối *IC* ta chứng minh rằng *CI* là phân giác của góc KCQ

Ta có $BIP = IBQ + IQB$

Nhưng $IBQ = IBK$ (phân giác)

$IQB = KBP$ (góc nội tiếp)

=> $BIP = IBP \Rightarrow \Delta PBI$ cân tại đỉnh *P*. *Do PB=PC* => ΔPCI cân tại đỉnh *P*

Ta có : $PIC = PQC + QCI$

$PCI = KCI + KCP$

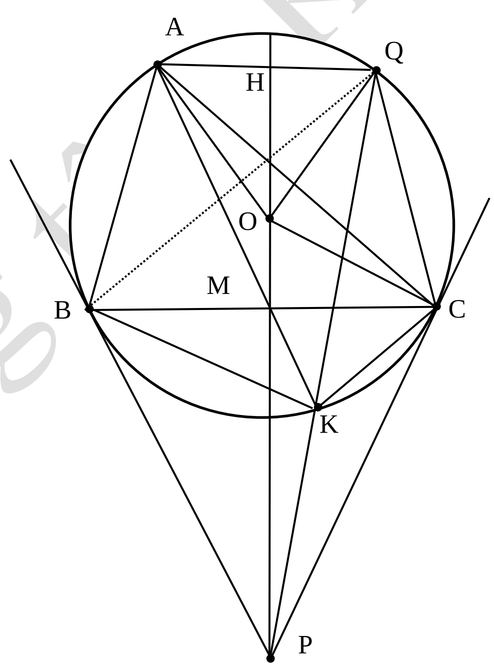
Do ΔPCI cân tại P nên $PIC = PCI$

=> $PQC + QCI = KCI + KCP$

Nhưng do $PQC = KCP$ (góc nội tiếp)

=> $QCI = KCI \Rightarrow CI$ là phân giác của góc $KCQ \Rightarrow$ điều phải chứng minh

2)(1,5 điểm)



<u>Cách thứ nhất</u>: Goi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có : $PC^2 = PM.PO$

$PC^2 = PK.PQ$

⇨ $PM.PO = PK.PQ$

⇨ *Tứ giác KMOQ nội tiếp*

⇨ $AKQ = QOH$

Do $AKQ = \frac{1}{2}QOA \Rightarrow QOH = AOH$ => OH là phân giác của tam giác cân OAQ

=> $OH \perp AQ \Rightarrow AQ \parallel BC$ vì cùng vuông góc với PH

<u>Cách thứ hai:</u>

$\Delta MKC \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{MC}{KC} = \frac{MA}{BA}$ *(1)*

$\Delta MKB \sim \Delta MCA \Rightarrow \frac{MB}{KB} = \frac{MA}{CA}$ *(2)*

Chia (1) cho (2) vế theo vế => $\frac{KB}{KC} = \frac{CA}{BA}$ *(3)*

Mặt khác, theo kết quả của câu 1) ta có

$\frac{KB}{QB} = \frac{KC}{QC} \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{QB}{QC}$ *(4)*

Từ (3) và (4) => $\frac{AC}{AB} = \frac{QB}{QC}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta QBC \Rightarrow ACB = QBC = AQB \Rightarrow AQ \parallel BC$

Câu IV: (1 điểm)

Ta chứng minh rằng với $|x| \geq 2$ thì

$|x|^n > |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + |x| + 1$

Thực vậy, ta có $|x|^n - 1 = |(x| - 1)(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + |x| + 1)$

Do $|x| \geq 2 \Rightarrow |x| - 1 \geq 1 \Rightarrow |x|^n - 1 \geq |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + |x| + 1$

$\Rightarrow |x|^n > |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + |x| + 1$ (1)

Do a_i nhận các giá trị $0, \pm 1$ nên ta có

$|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + |x| + 1 \geq |a_1x^{n-1}| + |a_2x^{n-2}| + ... + |a_nx| + |a_n|$

$\geq |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n|$ (2)

Từ (1) và (2) => với $|x| \geq 2$ thì

$|a_0x^n| = |x|^n > |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n|$ (3)

Chú ý rằng nếu $|a| > |b|$ thì *a+b và a* cùng dương hoặc cùng âm (thật vậy,

$a(a+b) = a^2 + ab \geq a^2 - |ab| = |a|(|a| - |b|) > 0$

Do đó từ (3) với $|x| \geq 2$, ta có:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ và a_0x^n cùng dương hoặc cùng âm $(a_0x^n \neq 0)$ Do vậy phương trình đã cho không có nghiệm *x* mà $|x| \geq 2$

Vậy, nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $|x_0| < 2$.